数理解析研究所講究録
第 440 巻 1981 年 76-84

$\mathbb{Z}_p$拡大のコホモロジー群について

プリンストン大学　岩澤 健吉
（ノート：藤崎源二郎記）

1° 以下，考える体はすべて代数体（複素数体$\mathbb{C}$の部分体であって，有理数体$\mathbb{Q}$の必ずしも有限次とは限らない代数的拡大体）である．

L/Kを代数体KのGalois拡大，$G = Gal(L/K)$をそのGalois群，AをG加群とすれば，Galoisコホモロジー群$H^n(G, A)$が定義される．ただし，Aはdiscreteな加群で，GのAへの作用$G \times A \longrightarrow A$は連続である．$H^n(G,A)$をまた$H^n(L/K, A)$あるいは単に$H^n(A)$と表すことが多い．

一例として，G $(=Gal(L/K))$加群の完全系列

$$0 \longrightarrow E_L \longrightarrow L^\times \longrightarrow P_L \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow P_L \longrightarrow I_L \longrightarrow C_L \longrightarrow 0$$

（ただし，$E_L = L$の単数群，$P_L = L$の単項ideal群，
$I_L = L$のideal群，$C_L = I_L/P_L$）

を考えれば，これらの完全系列から次の2つの完全系列が導かれる．

$$0 \longrightarrow E_K \longrightarrow K^\times \longrightarrow P_L^G \longrightarrow H^1(E_L) \longrightarrow H^1(L^\times)$$
$$\longrightarrow H^1(P_L) \longrightarrow H^2(E_L) \longrightarrow H^2(L^\times) \longrightarrow \cdots$$

および

$$\cdots \longrightarrow I_L^G \longrightarrow C_L^G \longrightarrow H^1(P_L) \longrightarrow H^1(I_L) \longrightarrow \cdots$$

上の2つの完全系列において $H^1(L^\times) = 0$，$H^1(I_L) = 0$ であることに注意すれば

$$H^1(L/K, E_L) \simeq P_L^G / P_K ,$$
$$\mathrm{Ker}\,(H^2(L/K, E_L) \longrightarrow H^2(L/K, L^\times))$$
$$\simeq \mathrm{Coker}\,(I_L^G \longrightarrow C_L^G)$$

が導かれる．

2° kを有限次代数体，K/kを$\mathbb{Z}_p$拡大，$\Gamma = \mathrm{Gal}(K/k)(\simeq \mathbb{Z}_p)$とする．$\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p$のコホモロジー次元から，任意の$\Gamma$加群$A$に対して

$$H^n(K/k, A) = H^n(\Gamma, A) = 0 \quad (n \geqq 3),$$

また，任意のtorsion Γ加群Aに対して

$$H^n(K/k, A) = H^n(\Gamma, A) = 0 \quad (n \geqq 2)$$

となることは知られている．したがって，$H^n(K/k, A)$ $(n \geqq 0)$において実際考察の対象となるのは $n = 0, 1,$

2の場合である.

特に, 整数論において大事な $A=E_K$ の場合に $H^2(E_K)$ を考えれば予想される形は

$$H^2(K/k, E_K) \simeq (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^a, \quad a \geqq 0$$

であり, $a=a(K/k)$ は K/k で一意的に定まる $\mathbb{Z}_p$ 拡大 K/k の1つの不変量である.

この不変量 $a=a(K/k)$ と K/k の他の不変量との関係または a と k の不変量との関係を調べることは大事な問題であろうと考えられる.

3° K, k, Γ は 2° におけるとおりとして

S = k の有限素点の任意の有限集合

S_0 = K/k で分岐する k の素点全体

とする. $v \in S_0 \Rightarrow v \mid p$ である.

いま, $E_S = E_{S,K}$ を K の S 単数群 (すなわち, S の素点の上にない K のすべての非Archimedes素点で単数となる K の元全体のつくる群) として

$$\varphi_S ; H^2(K/k, E_S) \longrightarrow H^2(K/k, K^\times) \hookrightarrow Br(k)$$

($Br(k)=k$ の Brauer 群) を考えれば

$$Ker(\varphi_S) \simeq Coker(I_{K,S}^\Gamma \longrightarrow C_{K,S}^\Gamma)$$

ここで, $I_{K,S}=K$ の S ideal群, $C_{K,S}=I_{K,S}/P_{K,S}$

である．

$H^2(K/k, E_S)$ については次の定理が成り立つ．

<u>定理 1</u>　$S_0 \subseteq S$ ならば

$$H^2(K/k, E_S) \simeq (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{t-1}$$

ここで，t は S に含まれていて K において"有限分解"する k の素点の個数である．

v を k の素点，Z_v を v の K/k に関する分解群とすれば Z_v は $\Gamma = Gal(K/k)(\simeq \mathbb{Z}_p)$ の閉部分群であるから

$$Z_v = \{1\} \Leftrightarrow v \text{ は } K/k \text{ で完全分解}$$

または

$$\Gamma/Z_v = \text{有限巡回群} \Leftrightarrow v \text{ は } K/k \text{ で有限分解}$$

となる．$S_0 \subseteq S$ のとき

$$\begin{aligned} \varphi_S : H^2(K/k, E_S) &\longrightarrow Br(k) \\ c &\longmapsto \varphi_S(c) = c' \\ &\qquad = (\cdots\cdots, inv_v(c'), \cdots\cdots) \end{aligned}$$

とすれば，$\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p$ pro-p-群 $\Rightarrow inv_v(c') \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ であり，また $v \notin S$ であるか $v \in S$ かつ v は完全分解ならば $inv_v(c') = 0$ である．さらに，和公式 $\sum_v inv_v(c') = 0$ が成り立つから，t が有限分解する $v \in S$ の個数ならば

$$Im(\varphi_S) \subseteq (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{t-1} \subseteq Br(k).$$

それゆえ，定理 1 により，$S_0 \subseteq S$ であるとき

$$\mathrm{Ker}(\varphi_S) = \text{有限} \iff \mathrm{Im}(\varphi_S) \simeq (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{t-1}$$

である．

<u>Lemma 1</u>．次の i), ii), iii) は同値である．

i) $\mathrm{Ker}(\varphi_S) = $ 有限　（$\forall S$ に対して）

ii) $\mathrm{Ker}(\varphi_S) = $ 有限　（$\forall S \supseteq S_0$ に対して）

iii) $\mathrm{Ker}(\varphi_{S_0}) = $ 有限

<u>問題 1</u>　$\mathrm{Ker}(\varphi_S) = $ 有限（$\forall S$）？

$\mathrm{Ker}(\varphi_S) = 0$ かどうかについては次の定理が成り立つ．

<u>定理 2</u>　S_0 を含むすべての S に対して

$$\mathrm{Ker}(\varphi_S) = 0 \iff C_{K,S_0}(p) = 0$$

ここで，$C_{K,S_0}(p)$ は $C_{K,S_0} = I_{K,S_0}/P_{K,S_0}$ の p 成分である．

$\mathrm{Ker}(\varphi_S) \neq 0$ となる例：$k = \mathbb{Q}(\sqrt[p]{1})$，$K = \mathbb{Q}(\sqrt[p^\infty]{1})$（$p > 2$）とすれば K/k は $\mathbb{Z}_p$ 拡大であり，$S_0 = \{v_p\}$（v_p は p を割る k の唯 1 つの素点），$C_{K,S_0} = C_K$ である．

とくに，p を irregular な素数とすれば，$C_{K,S_0}(p)$

$=C_K(p)\neq 0$ （素数 p について，p irregular $\Leftrightarrow$ $C_K(p)\neq 0$ ）であるから，定理2により，ある $S\supseteq S_0$ で $\mathrm{Ker}(\varphi_S)\neq 0$ となるものが存在する．

4° 以下，k は総実な有限次代数体，$K=k_\infty$ は k の basic $\mathbb{Z}_p$ 拡大体であるとする．このとき，問題1と関連して次の補題が成り立つ．

Lemma 2

$$C_K(p)^\Gamma = \text{有限} \implies C_{K,S}(p)^\Gamma=\text{有限}\quad(\forall S)$$
$$\implies \text{問題1（が肯定的に解ける）}$$

また，次のことも証明される．

Lemma 3

$$C_K(p)^\Gamma = \text{有限} \implies H^2(K/k, E_K)=(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{s-1}$$
$$(s=\#(S_0))$$

$\Leftrightarrow$ 有理素数 p を割る k の素 ideal $\mathfrak{P}$ は K においてすべて単項 ideal となる．

問題2　$C_K(p)^\Gamma=$ 有限 ?

問題3　$a(K/k)=s-1$? ($s=\#(S_0)$),

すなわち，$H^2(K/k, E_K)\simeq(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{s-1}$?

問題 2，3 においては，k＝総実な有限次代数体，K/k＝basic $\mathbb{Z}_p$ 拡大である．問題 2 は総実でない k に対しては一般に成り立たない．

5° k＝総実な有限次代数体の場合には，Leopoldt 予想は次のように述べることができる．

<u>Leopoldt 予想</u>（L.C.）：$K = k_\infty$（k の basic $\mathbb{Z}_p$ 拡大体）が k 上の唯 1 つの $\mathbb{Z}_p$ 拡大体である（?）

また，総実な k に対しては次の予想がある．

<u>Greenberg 予想</u>（G.C.）：K/k が basic $\mathbb{Z}_p$ 拡大ならば，$\lambda(K/k) = \mu(K/k) = 0$?

$$(\Longleftrightarrow \quad C_K(p) = 0 \ ? \ )$$

上に述べた 2 つの予想と問題との間には次のような関連がある（k＝総実 有限次代数体）．

$$\begin{tikzcd}
\text{L.C.} \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{問題 1} \\
& \text{問題 2} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{G.C.} \arrow[ur, Rightarrow] & & \text{問題 3}
\end{tikzcd}$$

さらに，次のことが証明される．

$$G.C. \Longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi_S)=0\ (\forall S) \Longrightarrow C_{K,S_0}(p)=0,$$

$C_K(p)=C_{K,S_0}(p) \Longleftrightarrow$ 問題3がすべてのK/k_nに対して肯定的に解ける．

（ここで，k_nは$\mathbb{Z}_p$拡大K/kのすべての中間体を表す．）

それゆえ，次の定理が成り立つ．

<u>定理3</u>　k＝総実な有限次代数体，K/k＝basic $\mathbb{Z}_p$拡大とするとき，

G.C. 正しい $\Longleftrightarrow$

1) $\mathrm{Ker}(\varphi_S)=0\quad(\forall S)$.
2) $k\quad k_0 \subseteq k_1 \subseteq \cdots \subseteq k_n \subseteq \cdots \subseteq K$とするとき，問題3がすべての$K/k_n$に対して肯定的に解ける．

以上に述べたことからわかるとおり，問題2および問題1，3はLeopoldt予想あるいはGreenberg予想の必要条件である．したがって，L.C.あるいはG.C.が正しいかどうかを確かめるために（も）問題1，2，3を考えることは意味があると思われる．（なお，Leopoldt予想は総実なkに対してessentialである．）

附記：この講演記録は，藤崎が，岩澤教授の講演の際とったノートにもとづいて作製したものです．したがって，思いちがいや誤りは一切藤崎に責任があります．