数理解析研究所講究録
第 441 巻 1981 年 51-56

E_h 空間の固有値問題

九大 工学部 川畑 茂徳

§1 $\mathbb{N}$を自然数の集合（0を含めて）とし，$\mathbb{N}$上のFréchet filterをふくむultrafilterを1つ固定して考えこれを以下$\mathcal{F}_0$であらわす。h_nをHermite函数とする，

$$h_n(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x),$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}),$$

d次元の場合，$h_p(x) = h_{p_1}(x_1) h_{p_2}(x_2) \cdots h_{p_d}(x_d)$，$p = (p_1, p_2, \cdots, p_d) \in \mathbb{N}_d$，$p_j$は整数$\geqq 0$で置きかえて考える。今回は$d=1$の場合に限定して議論するがd次元の場合に拡張できる。$\mathbb{C}^n$をn次元複素ユークリッド空間とし，

$$\mathbb{E} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}^{n+1} / \mathcal{F}_0$$

で$\mathbb{E}$を定義する。$\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}^{n+1}$の2元，$a = (a^{(n)})$，$b = (b^{(n)})$に対し

$$a \simeq b \Leftrightarrow \{n;\ a^{(n)} = b^{(n)}\} \in \mathcal{F}_0$$

という同値関係を定義し，それによって$\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}^{n+1}$を類別したも

のが $\mathbb{E}$ である。$(\alpha^{(n)})$ をふくむ同値類を $[\alpha^{(n)}]_n$ であらわそう。$\mathbb{E}$ の元の間には自然に加法が定義され，${}^*\mathbb{C}$ 上の線型空間となる。a, b の内積は

$$(a, b) = [\ (\alpha^{(n)}, b^{(n)})]_n \in {}^*\mathbb{C}$$

によって定義される。ここに $(\alpha^{(n)}, b^{(n)})$ は $\mathbb{C}^{n+1}$ 上の内積である。$\mathbb{E}$ の元に対し，エルミート函数列 $\{h_n\}$ を用いて，${}^*\mathbb{R}$ から ${}^*\mathbb{C}$ への函数 ψ を対応させ，この函数の全体を $\mathbb{E}_h({}^*\mathbb{R})$ 又は $\mathbb{E}_h$ で表わす。$a=[\alpha^{(n)}]_n \in \mathbb{E}$ に対し

$$a \longmapsto \psi = [\psi_n]_n = [\sum_{p\leq n} a_p^{(n)} h_p]_n ,$$

あきらかに，$a, b \in \mathbb{E}$ の内積に関して $a \longmapsto \psi$, $b \longmapsto \varphi$ とするとき

$$(a,b) = [\int_R \psi_n(x)\overline{\varphi_n(x)}dx]_n = \left((\psi,\varphi) \text{ と書く} \right)$$

ゆえに上の対応 $\mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}_h$ は内積を不変にする同型対応である。$\psi = [\sum_{p\leq n} a_p^{(n)} h_p]_n$ に対し，フーリエ変換を

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}\psi = [\sum_{p\leq n} a_p^{(n)} \mathcal{F}h_p]_n = [\sum_{p\leq n} i^p \alpha_p^{(n)} h_p]_n$$

で定義する。空間 $\mathbb{E}_h$ の函数はフーリエ変換によって，やはり空間 $\mathbb{E}_h$ の函数に移されることがわかる。そのうえ同じ議論がフーリエの逆変換についてもいえるから，フーリエ変換によって空間 $\mathbb{E}_h$ は自分自身のうえに移される。

§2　$\mathbb{E}_h$ 上の作用素と固有値問題

Dirac は変換理論の立場から今日 Dirac space と呼ばれてい

る理論体系を導入した。「量子力学」の第3版ではブラ・ベクトルおよびケット・ベクトルという記号を用いた。それはDiracの記号で内積$\langle a|b\rangle$が定義されており，

(1) オブザーバブルAはつねに空間全体で定義されたエルミート線型作用素である。

(2) Aが連続不連続両方の固有値と固有ベクトルをもつとき，離散固有値λ_iをもつ固有ベクトルを$|\lambda_i\rangle$，連続固有値ξをもつ固有値を$|\xi\rangle$であらわすと，それは次のように規格化される。

$$\langle \xi|\xi'\rangle = \delta(\xi-\xi') \tag{1}$$

$$\langle \lambda_i|\lambda_j\rangle = \delta_{ij} \tag{2}$$

etc.

しかしこの空間は数学的に巨大なフィクションであり，Bogolioubv らによって導入されたGelfandの3つ組によってもまた竹内外史(1961)に始まりFarrukh(1975)に受けつがれたHibert空間Hの超巾 $^*\mathbb{H}=\mathbb{H}^N/\mathcal{F}_0$ を用いる方法によっても(1)式を合理的に説明しえなかった。この小文では空間$\mathbb{E}_n$上で微分作用素を定義し，その固有値問題を考え(1),(2)式についてのみ議論する。

まず$\mathbb{E}_n$上の微分作用素 $L= p_0(x)D^m + p_1(x)D^{m-1} + \cdots + p_{m-1}(x)D + p_m(x)$ を定義しよう。 $A = \left((xh_p, h_q)_{L^2} \right)_{p,q\le n}$, $B = \left((Dh_p, h_q)_{L^2} \right)_{p,q\le n}$

を $(n+1)\times(n+1)$ 行列とする，行列 A, B の函数 $f(A,B)$ を x の整函数 $P_0(x), P_1(x), \cdots, P_m(x)$ で次のように定義する。

$$f(A,B)=P_0(A)B^m+P_1(A)B^{m-1}+\cdots+P_{m-1}(A)B+P_m(A)$$

この行列 $f(A,B)$ で $\mathbb{E}_n$ 上の作用素 L は定義される。

$$L\phi=\Big[\sum_{p,q\leq n} f(A,B)_{p,q}\, a_p^{(n)} h_q\Big]_n \qquad (3)$$

但し，$\phi=\Big[\sum_{p\leq n} a_p^{(n)} h_p\Big]_n$，$f(A,B)_{p,q}$ は行列 $f(A,B)$ の (p,q) 要素．

多論独立変数をかける作用素と微分作用素 D は(3)式の特殊な場合になっている，

$$x\phi(x)=\Big[\sum_{p,q\leq n} A_{p,q}\, a_p^{(n)} h_q(x_n)\Big]_n=\Big[\sum_{p\leq n}\Big\{\sqrt{\tfrac{p+1}{2}}\,a_{p+1}^{(n)}+\sqrt{\tfrac{p}{2}}\,a_{p-1}^{(n)}\Big\}h_p(x_n)\Big]_n$$

$$D\phi(x)=\Big[\sum_{p,q\leq n} B_{p,q}\, a_p^{(n)} h_q(x_n)\Big]_n=\Big[\sum_{p\leq n}\Big\{\sqrt{\tfrac{p+1}{2}}\,a_{p+1}^{(n)}-\sqrt{\tfrac{p}{2}}\,a_{p-1}^{(n)}\Big\}h_p(x_n)\Big]_n$$

作用素 L の固有値問題を考えよう。$Le_\lambda=\lambda e_\lambda$ に対し Dirac の関係式(1)に相当する式，$(e_\lambda, e_{\lambda'})=\delta(\lambda,\lambda')$，$\forall\lambda,\lambda'\in{}^*\mathbb{R}$ 但し $\delta(\lambda,\lambda')=\Big[\sum_{p\leq n} h_p(\lambda_n)\, h_p(\lambda'_n)\Big]$，が成立するであろうか？独立変数を掛ける作用素 $x\cdot$，微分作用素 $D\cdot$ のとき肯定的である．一般の L については未解決．

任意の $n\in\mathbb{N}$ について $f_n(x)=0$ は少なくとも $n+1$ 個の相異なる実根を有するとき，実根の集合を $F(n)=\{x;\ f_n(x)=0\}$ で表わす。${}^*F=\prod_{n\in\mathbb{N}} F(n)/\mathfrak{F}_0$ とおく，$f_n(x)\equiv H_{n+1}(x)$（$n+1$ 次の Hermite 多項式の場合）${}^*F\equiv{}^*H.P$ と書く．さて次の補題は以下の議論に基本的である．

補題　$\forall x\in{}^*F$ に対し $\phi(x)=0 \Rightarrow \phi\equiv 0$.

(証明)　$\phi=[\phi_n]$ とする。$\forall x\in F(n)$ に対し $\phi_n(x)=0$ ならば $\phi_n\equiv 0$ であるから，$\phi_n\neq 0$ ならば $\exists x\in F(n)$，$\phi_n(x)\neq 0$．背理法によって示す。今 $\exists x\in {}^*\mathbb{R}$，$\phi(x)\neq 0$ とすれば

$$\{n;\ \phi_n(x_n)\neq 0\}\equiv A\in\mathcal{F}_0.$$

前述のことより，$\forall n\in A$ について $\exists y_n\in F(n)$，$\phi_n(y_n)\neq 0$．A に属さない n に対し $y_n=0$ として $y\equiv[y_n]_n$ と定義すると $y\in {}^*F$，$\phi(y)\neq 0$ に出来る。これは矛盾である。

$\boxed{\text{定理}}$　作用素 $x\cdot$，$\frac{1}{i}D\cdot$ の固有ベクトル e_λ，f_λ に対し

$$(f_\lambda, f_{\lambda'})=(e_\lambda, e_{\lambda'})=\delta(\lambda,\lambda')\qquad \forall\lambda,\lambda'\in{}^*\mathbb{R}$$

が成立つ。

(証明)　$\mathcal{F}(\frac{1}{i}D\phi)=\sigma\cdot(\mathcal{F}\phi)(\sigma)$ であるから $f_\lambda=\mathcal{F}e_\lambda$．従って固有ベクトル e_λ についてのみ証明すれば十分である．e_λ は定義から次式をみたす。

$$\sqrt{\frac{n}{2}}\,a^{(n)}_{n-1}=\lambda_n a^{(n)}_n$$

$$p<n \text{ のとき}\quad \sqrt{\frac{p+1}{2}}\,a^{(n)}_{p+1}+\sqrt{\frac{p}{2}}\,a^{(n)}_{p-1}=\lambda_n a^{(n)}_p\qquad,\ \lambda=[\lambda_n]_n.$$

この式は $H_{n+1}(\lambda_n)=0$ として $a^{(n)}_p=h_p(\lambda_n)$ で満足される。従って $\lambda\in{}^*H.P$ のとき $e_\lambda(x)=[\sum_{p\le n}h_p(\lambda_n)h_p(x_n)]_n$．ここで e_λ を λ の函数とみるとき $\forall\lambda\in{}^*H.P$ に対し $e_\lambda(x)=\delta(\lambda,x)$ であるから補題により，$\forall\lambda\in{}^*\mathbb{R}$ について $e_\lambda(x)=\delta(\lambda,x)$．従って $(e_\lambda,e_{\lambda'})=\delta(\lambda,\lambda')$ が成りたつ。

§3　空間$\mathbb{E}_n$の元は補題で示されるように^{*0}における値を知れば決まってしまう。ここでは簡単な例をあげよう。

$\boxed{\text{補題}}$　$x \in {}^*H.P$，$x \neq 0$ のとき

$$\delta(x) = \Big[\sum_{p \leq n} h_p(0) h_p(x_n) \Big]_n = 0.$$

（証明）　$H_{2m}(\xi) \equiv \hat{H}_{2m}((2\xi)^2)$，$H_{2m+1}(\xi) \equiv 2\xi \hat{H}_{2m+1}((2\xi)^2)$ とおくと，$\hat{H}_{2m}(t)$ および $\hat{H}_{2m+1}(t)$ はそれぞれ m 次の多項式である。$n=2m$ のとき（$n=2m-1$ のときも同様）$\hat{H}_{2m+1}(t)$ の根を $s_1, s_2 \cdots s_m$ とすると $H_{2m+1}(x)$ の根は $0, \pm\frac{1}{2}\sqrt{s_j}$，$s_j > 0$，$j = 1, 2, \cdots m$ である。

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{1}{2^k k!} \hat{H}_{2k}(s_j) = (-1)^m \frac{1}{2^m m!} \hat{H}_{2m+1}(s_j) \qquad (4)$$

を示すとよい。しかし実際は(4)式は恒等式であって

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{1}{2^k k!} \hat{H}_{2k}(t) = (-1)^m \frac{1}{2^m m!} \hat{H}_{2m+1}(t)$$

が成立する。

さらに $y, x \in {}^*H.P$ のとき $x \neq y$ であれば $\delta(x, y) = 0$ であることが予想される。