数理解析研究所講究録
第441巻 1981年 143-158

初等解析学におけるある種の問題の集合論からの独立について

名大 教養部　　柘植 利之

この講演の内容は野本久夫氏との共同による仕事の紹介であって，その共同研究は竹内外史氏から本講演者への手紙の中で提起された次の問題に解決を与えたものである。

Aを実数の集合：$A \subseteq \mathbb{R}$として，

(P)　任意に与えられた実数列$\{a_k\}$に対し
$$e^{2\pi i a_k t} \longrightarrow 1 \quad (\forall t \in A) \Longrightarrow a_k \longrightarrow 0$$

という命題を考える。$A = \mathbb{R}$のとき，この命題は正しい。一般に，$A \subsetneq \mathbb{R}$に対して(P)が成り立つために，Aが満たすべき条件は何か？

結論として，Aについての命題(P)が集合論の公理系ZFCから独立であるような集合Aが存在する。

1. はじめに

集合Aが有理数全体の集合$\mathbb{Q}$のとき，命題(P)は成り立た

ない。自然数列 $\{n!\}$ がその反例である。$\nu = \{n!\}$ に関しては

$$G_\nu = \{ t \mid e^{2\pi i n! t} \longrightarrow 1 \}$$

とおくと，$\mathbb{Q} \subseteq G_\nu$ であるのみならず，$e \in G_\nu$ である。さらに一般に，任意に固定された自然数 M に対して，

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_n}{n!} \quad , \quad \tau_n = 0, 1, \cdots, M$$

であるような実数 t はすべて G_ν に属する。実際に，

$n!t$ の小数部分 $n!t - [n!t]$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} n! \frac{\tau_{n+k}}{(n+k)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_{n+k}}{(n+1)\cdots(n+k)} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{(n+k)^k} = \frac{M}{n}$$

という評価式より，$e^{2\pi i n! t} \longrightarrow 1 \ (n \to \infty)$ が成り立つことがわかる。

同様に，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_k}{10^{k!}} \ (\tau_k = 0, 1, \cdots, 9)$ という形の Liouville の超越数全体の集合に対しても，命題（P）は否定的である。すなわち，自然数列 $\{10^{n!}\}$ が一つの反例である。かくして，集合 A の濃度が $2^{\aleph_0}$ であっても命題（P）が成り立たない例はいくらでも存在することがわかる。実際に，上述の型の実数の集合 A に対して命題（P）の正否についての判定条件を与えることができる。

陳述の簡便化のため，$\mathbb{R}$ の部分集合 A と実数列 $\{a_k\}$ とに

に対して条件：

$$(\mathrm{C}) \qquad \lim_{k\to\infty} e^{2\pi i a_k t} \longrightarrow 1 \quad (\forall t \in A)$$

が満たされるような対 $\langle A, \{a_k\}\rangle$ の全体を $\mathcal{C}$ で表わそう。

$p \geqq 2$ を与えられた整数とし，$\nu = \{n_k\}$ を自然数の増加列として

$$A_\nu = \left\{ t \,\middle|\, t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_k}{p^{n_k}},\ \tau_k = 0, 1, \cdots, p-1 \right\}$$

とおく。初等的な計算から次のことがいえる。

<u>定理</u>　1．集合 A_ν に対して，(P) が成り立つために必要十分な条件は，$\Delta\nu = \{n_{k+1} - n_k\}_{k\in \mathbb{N}}$ が有界であることである。

（略証）　$\Delta\nu$ が有界でないとすると，$\lim (n_{k_j+1} - n_{k_j}) = \infty$ となる部分列 $\{n_{k_j}\}$ が存在する。このような $\{n_{k_j}\}$ に関して，容易に $\langle A_\nu, \{p^{n_{k_j}}\}\rangle \in \mathcal{C}$ を示すことができ，したがって (P) は A_ν に対して成り立たない。

逆に十分性をみるため，$\Delta\nu$ が有界であるとしよう。このとき，A_ν によって生成される部分加群 G_ν は区間 $[0, 1]$ を含むことが示され，結局 $G_\nu = \mathbb{R}$ である。したがって，

任意の実数列 $\{a_k\}$ に対して，$\langle A_\nu, \{a_k\}\rangle \in C$ を仮定すると $\langle R, \{a_k\}\rangle \in \mathbb{C}$ が導かれ，$a_k \longrightarrow 0$ が結論されることとなる。すなわち，このような A_ν に対してつねに（P）が成り立つ。

カントールの集合Cについては，（P）が成り立つことを示すのは容易であるが，この定理の十分条件の証明はやや複雑さをまぬがれないものの，その一般化を与えている。

2. 集合Aの濃度に関して

上の定理1で連続体の濃度をもつある種の集合Aについて（P）の真偽に関する判定条件を与えたが，この節ではAの濃度が $2^{\aleph_0}$ より小さい場合を考える。

まず，Aが可算集合ならば，（P）はつねに偽である。実際に，任意に与えられた可算集合Aに対して，対角線論法的手法によりその反例を作ることができる。

そこで，$\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$ を仮定して，$|A| = \kappa < 2^{\aleph_0}$ であるような集合Aについて調べよう。このため，Martinの公理（Martin－Solovay［8］）を仮定する。

この節を通じて，便宜上，増加自然数列 $\{n_k\}_{k\in\omega}$ を記号的に狭義単調増加関数 $f: \omega \longrightarrow \omega$，$k \longmapsto f_k$ として表わすこととする。

$|A| = \kappa < 2^{\aleph_0}$であるような$\mathbb{R}$の部分集合$A$が与えられたとして，$A = \{t_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$としよう。

Aが可算な場合の自然な拡張として，超限帰納法により，次の2つの条件：

(a)　$\beta < \alpha < \omega_1$であるような任意の$\alpha$と$\beta$に対して$\{f^\alpha_k\}$はその有限個の項を除いて，$\{f^\beta_k\}$の部分列である；

(b)　$\beta \leq \alpha < \omega_1$であるような任意の$\beta$と$t_\beta \in A$に対して，小数部分$f^\alpha_k t_\beta - [f^\alpha_k t_\beta]$の列は$\alpha\ (> \beta)$に無関係な実数$\Delta_\beta$に収束する

を満たすような$f^\alpha : \omega \longrightarrow \omega$の集合$\{f^\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$を作ることができる。

Martinの公理MAおよび$\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$を仮定し，κは$2^{\aleph_0}$より小なる任意の濃度として，次の補助定理が得られる。

<u>補助定理</u> 1 (MA + ¬CH).　任意の集合$A = \{t_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$に対して，つねに

(c)　$f_k t_\alpha - [f_k t_\alpha] \longrightarrow \Delta_\alpha \quad (\forall t_\alpha \in A)$

を満たすような増加関数$f : \omega \longrightarrow \omega$が存在する。

(証明)　与えられた集合Aに対して，上の条件(a), (b)においてω_1の代りにκとおいたものを満たすような増加関数$:\omega \longrightarrow \omega$の集合$\mathcal{F} = \{f^\alpha \mid \alpha < \kappa\}$が定められたと仮定

しよう。各 $f^\alpha \in \mathcal{F}$ に対して，$F_\alpha = \omega - range(f^\alpha)$ とする。順序集合 $(P, \geq)$ を次のように定める：

$$P = \{\langle N, K\rangle \mid N \text{ は } \omega \text{ の有限部分集合で，} K \text{ は } \kappa \text{ の有限部分集合合}\},$$

$$\langle N, K\rangle \geq \langle N', K'\rangle \Longleftrightarrow N \subseteq N',\ K \subseteq K',$$
$$\text{かつ } (N' - N) \cap \bigcup_{\alpha \in K} F_\alpha = \phi。$$

$(P, \geq)$ は ccc を満たす。実際に，P の非可算部分集合は必らず compatible な対 $\langle N, K\rangle$，$\langle N, K'\rangle$ を有する。なぜなら，P の元の第一要素 N は高々可算だから。

各 $n \in \omega$ と $\alpha \in \kappa$ に対して，それぞれ D_n と D_α を

$$D_n = \{\langle N, K\rangle \in P \mid |N| > n\},$$
$$D_\alpha = \{\langle N, K\rangle \in P \mid \alpha \in K\}$$

によって定義し，$\mathcal{D} = \{D_n \mid n \in \omega\} \cup \{D_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$ とおく。$\mathcal{D}$ の各元は P で稠密である。D_α が P で稠密であることは明らかであるから，D_n が P で稠密であることを示そう。$\langle N, K\rangle$ を P の任意の元としよう。f^α に対する仮定 (a) より $\omega - \bigcup_{\alpha \in K} F_\alpha$ は無限個の要素を含んでいるから，その中から必要なだけ幾らでも N にその要素をつけ加えて $|N'| > n$ となるように $N' \supseteq N$ を作ることができる。$\langle N', K\rangle \in D_n$ であって，$(N' - N) \cap \bigcup_{\alpha \in K} F_\alpha = \phi$ より $\langle N, K\rangle \geq \langle N', K\rangle$ である。

さて，$|\mathfrak{D}| = \kappa < 2^{\aleph_0}$ であるから，Martin の公理を適用することができて，$\mathfrak{D}$ の各集合と交わるような P の部分集合で compatible なものがとれる。これを Q とし，

$$F = \bigcup \{ N \mid \langle N, K \rangle \in Q \}$$

としよう。すると，次のことがいえる：

(i)　F は ω の無限部分集合である。

(ii)　すべての $\alpha \in \kappa$ に対して，$F \cap F_\alpha$ は有限である。

任意の $n \in \omega$ に対して，$|N| > n$ であるような $\langle N, K \rangle$ が Q の中にあるから (i) は明らかである。(ii) を示すために $\langle N, K \rangle$ を Q の任意の元とし，$\langle N', K' \rangle \in Q \cap D_\alpha$ としよう。Q は compatible であるから，$\langle N, K \rangle \geq \langle N'', K'' \rangle$ かつ $\langle N', K' \rangle \geq \langle N'', K'' \rangle$ となるような $\langle N'', K'' \rangle \in P$ が存在する。$\geq$ の定義より $N \subseteq N''$ および $(N'' \smallsetminus N') \cap F_\alpha = \phi$ であり，このことから $(N \smallsetminus N') \cap F_\alpha = \phi$ を得る。それ故，$F \cap F_\alpha = (\bigcup \{ N \mid \langle N, K \rangle \in Q \}) \cap F_\alpha \subseteq N'$，したがって，$F_\alpha$ は有限である。

(i) より F をその要素の大きさの順序：

$$F = \{ n_0, n_1, \cdots, n_k, \cdots \}$$

に並べて，$f(k) = n_k$ となるよう狭義の単調増大関数 $f : \omega \longrightarrow \omega$ を生成できる。(ii) によって，いかなる $\alpha < \kappa$ に対しても，$\{f_k\}$ はその最初の有限個の項を除いて $\{f_k^\alpha\}$ の部

分列となり，したがって，f は (C)：

$$f_k t_\alpha - [f_k t_\alpha] \longrightarrow s_\alpha \quad (\forall t_\alpha \in A)$$

を満たしている。

<u>定理</u> 2 (MA + ¬CH)．任意の集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して，$|A| < 2^{\aleph_0}$ ならば

$$\lim_{k\to\infty} e^{2\pi i a_k t} \longrightarrow 1 \quad (\forall t \in A)$$

となるような増加数列 $\{a_k\}$ が存在する。

(証明) $|A| = \kappa < 2^{\aleph_0}$ とし，$A = \{t_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ とおく。いま，A に対して，(P) が成り立つと仮定しよう。すなわち任意の数列 $\{a_k\}$ に対して，

$$\langle A, \{a_k\} \rangle \in \mathcal{C} \Longrightarrow a_k \longrightarrow 0.$$

集合 A に対して，補助定理 1 より，条件 (C) を満たすような generic な関数 f が存在する。このような f をとり，

$$m_k = f_{k+1} - f_k$$

とおく。すべての $t_\alpha \in A$ に対して，

$$\begin{aligned} e^{2\pi i m_k t_\alpha} &= \exp[2\pi i (f_{k+1} - f_k) t_\alpha] \\ &= \exp(2\pi i f_{k+1} t_\alpha) \cdot \exp(-2\pi i f_k t_\alpha) \\ &\longrightarrow e^{2\pi i s_\alpha} \cdot e^{-2\pi i s_\alpha} = 1 \end{aligned}$$

であるから，仮定により，$m_k \longrightarrow 0$．これは f の定義に反する。

この定理の直接の系として，Gödel の結果（例えば，[3]）を用いることにより，次のことが得られる。

<u>構成的実数全体の集合に対して</u>，<u>命題</u>（P）<u>の正否は集合論の公理系から独立である</u>。

命題（P）の集合論の公理系からの独立性については，他の例も含めて，4節で精しく論ずる。

<u>3</u>．集合Aの測度とカテゴリーに関して

ルベーグ可測性やベールの性質に関連して問題を考察するのには次の補助定理が有効である。

<u>補助定理</u>　2．$\langle A, \{a_k\}\rangle \in \mathcal{C}$ とし，$|A| > \aleph_0$ とする。このとき，$\{a_k\}$ の部分列が a に収束するならば，$a = 0$ である。また，もし $\{a_k\}$ が0に収束しなければ，$\langle A, \{n_k\}\rangle \in \mathcal{C}$ となるような自然数の増加列 $\{n_k\}$ が存在する。

（証明）　$\{a_k\}$の部分列 $\{a_{k_j}\}$ が a に収束するならば，条件（C）：$\lim_{k\to\infty} e^{2\pi i a_k t} = 1$　$(t \in A)$ から，いかなる $t \in A$ に対しても $e^{2\pi i a t} = 1$ を得る。故に，各 $t \in A$ に対して $at \in \mathbb{Z}$ となり，$|A| > |\mathbb{Z}|$ より $a = 0$ でなければならない。

次に，$\{a_k\}$ が0に収束しないとすると，補助定理の前半

の事実から $\{a_k\}$ は有界ではない。そこで一般性を失うことなく，$a_{k_j} \longrightarrow \infty$ かつ（必要とあらば更にその部分列をとることにより）$m_j = [a_{k_{j+1}}] - [a_{k_j}] \geqq 1$ $(j = 1, 2, \cdots)$ を満たすような部分列 $\{a_{k_j}\}$ が存在するとしてよい。他方，小数部分の列 $\varepsilon_j = a_{k_j} - [a_{k_j}]$ は閉区間 $[0, 1]$ 上で収束する部分列を有する。ここで簡単のため，ε_j 自身が極限 ε に収束すると仮定しよう。A の各元 t に対して，

$$e^{2\pi i m_j t} = e^{2\pi i a_{k_{j+1}} t} e^{-2\pi i \varepsilon_{j+1} t} \cdot e^{-2\pi i a_{k_j} t} e^{2\pi i \varepsilon_j t}$$

より，$\lim_{j \to \infty} e^{2\pi i m_j t} = e^{-2\pi i \varepsilon t} \cdot e^{2\pi i \varepsilon t} = 1$ が導かれ，結果として $\langle A, \{m_j\} \rangle \in C$ を得る。$m_j \geqq 1$ であるから，再びこの補助定理の前半を用いて，$\{m_j\}$ は有界ではあり得ない。したがって，$\langle A, \{n_k\} \rangle \in C$ となるような $\{m_j\}$ の増加部分列 $\{n_k\}$ をとり出すことができる。

<u>定理</u> 3 $\langle A, \{a_k\} \rangle \in C$ とする。もし

1) A が正測度をもつ可測集合

かまたは

2) A が非可測集合

ならば，$a_k \longrightarrow 0$ である。

（証明） 1) $\mu(A) > 0$ ならば，よく知られているように，Steinhaus の定理 [11] により，代数和 $A - A$ は 0 の

近傍 $(-a, a)$ を含む。したがって，$\langle (-a, a), \{a_k\} \rangle \in C$ を得，かくして $a_k \longrightarrow 0$。

2) $a_k \longrightarrow 0$ とすると，補助定理2の後半により

$$e^{2\pi i n_k t} \longrightarrow 1 \quad (\forall t \in A)$$

となるような増加自然数列がとれる。いま，

$$G = \{ t \in \mathbb{R} \mid \lim_{k \to \infty} e^{2\pi i n_k t} = 1 \}$$

を考えると，G は A を含む Borel 集合である。したがって，1) により $\mu(G) = 0$ でなければならない。そこで，ルベーグ測度の完備性より，A もまた零集合となってしまい，A が非可測であることに反する。

この定理の証明と同様な仕方（カテゴリーに関して，A が第Ⅱ類の集合ならば，その代数和が 0 の近傍を含むという事実に関しては，例えば，Bourbaki [2, §5, Exer. 27] を参照されたい）によって，次の類似した定理を得る。

<u>定理</u> 3′ $\langle A, \{a_k\} \rangle \in C$ とする。もし

1) A がベールの性質をもつ第Ⅱ類の集合

かまたは

2) A がベールの性質をもたない

ならば，$a_k \longrightarrow 0$ である。

定理3と3'とから，$\langle A, \{a_k\}\rangle \in C \Longrightarrow a_k \longrightarrow 0$ となるような第I類（meager）の集合や零集合が幾らでも存在することがわかる。更に，A が nowhere dense null set であってさえ，(P) が成り立つような集合 A がある。例えば，すでに述べたように，カントールの完全集合 C がそうである。しからば完全集合に関しては (P) がつねにいえるか？定理1により，$\{n_k\}$ を $n_{k+1}-n_k \longrightarrow \infty$ であるような自然数列とするとき，$C_\nu = \{t \mid t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_k}{3^{n_k}},\ \tau_k = 0, 2\}$ に含まれるいかなる完全集合に対しても (P) は成り立たない。$\{3^{n_k}\}$ がその反例である。

4　独立性について

記述の簡略化のために，集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ に関する命題 (P) を P(A) で表わそう。すなわち，

$$P(A)\ :\ \forall\{a_k\}\,[\langle A, \{a_k\}\rangle \in C \Longrightarrow a_k \longrightarrow 0].$$

いま，すべての構成的実数の集合 $\mathbb{R}\cap L$ を考えよう。よく知られているように，Solovay（例えば，Jech [4, p.568] を参照）は $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$ でかつ $\mathbb{R}\cap L$ がルベーグ非可測であるような ZFC のモデルがあることを示した。そのようなモデルでは，定理3によって $P(\mathbb{R}\cap L)$ である。他方，定理2によって，Martin の公理 MA および $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$ の仮定のもと

では，$\neg P(\mathbb{R}\cap L)$ である。これは ZFC のいかなるモデルにおいても $|\mathbb{R}\cap L|\leq\aleph_1$ であることより明らかである。さて，MA $+\neg$CH は ZFC と無矛盾であるから，$\neg P(\mathbb{R}\cap L)$ もまた ZFC と無矛盾である。かくして次の結論を得る。

命題 P(G) が ZFC から独立となるような $\mathbb{R}$ の真部分加群 G が存在する。

この事実に関連して，ゲーデルの構成可能性公理のもとでは $\mathbb{R}\cap L=\mathbb{R}$ であるから，この意味では $\mathbb{R}\cap L$ はあまり面白くない例のように見えるかも知れない。しかし，このことは2節の最後で述べたように，問題の独立性に関する限り，定理2の直接の系として得られるものであって，定理3（または定理3'）を用いることなく，また上述の Solovay のモデル（ないしは，Solovay, Vopěnka - Hrbáček [12]，あるいは Shinoda [9] によるベールの性質にかかわる類似のモデル）に言及することなく，より簡単な独立性の証明が与えられることを注意しておきたい。

最後に，$\mathbb{R}$ の部分集合のクラスで命題 (P) が ZFC から独立となるようなクラスの例を挙げておきたい。

集合 $A\subseteq\mathbb{R}$ が strong measure 0 をもつ（あるいは，性質 C をもつ，ともいう．例えば，Sierpiński [10]，Kuratowski [5]，ないしは [8] を参照）というのは，正の実数

からなる任意の数列$\{a_n\}$に対して，length $I_n \leq a_n$ でかつ $A \subseteq \bigcup_{n\in\omega} I_n$ となるような区間の列$\{I_n\}$が存在することと定義する。この概念はBorel [1, p.123] によって導入されたものであって，Borelは「strong measure 0 をもつ集合は可算集合に限る」という予想を立てた。1976年に，Laver は Borelの予想が成り立つような ZFC のモデルが存在することを証明した。そのようなモデルでは，strong measure 0 をもつ集合Aに対してはつねに $\neg P(A)$ である。

Lusin [7] によって，連続体仮説のもとでは，いかなる nowhere dense な集合Fに対しても $|E \cap F| < 2^{\aleph_0}$ であって，しかも $|E| = 2^{\aleph_0}$ となるような$\mathbb{R}$の部分集合Eが存在する。このような集合をルージンの集合という。Martin-Solovay [8] によって，MA および $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$ の仮定のもとでもルージンの集合が存在することが知られている。いま，$2^{\aleph_0} = \aleph_1$（または，MA + $\neg$CH）を仮定しよう。このとき [10]（あるいは Strong Baire Category Theorem，[8, p.177]）によって，ルージンの集合Eは strong measure 0 をもつことが知られている。さて，ルージンの集合はその定義より明らかに第II類の集合であるから，定理3′ によって，$P(E)$ である。それ故ゲーデル（あるいは，[8]）によって，$P(A)$ が真となるような strong measure 0 をもつ

非可算集合Aが存在する，としても ZFC と無矛盾である。すなわち，次の結論が得られる。

すべての strong measure 0 の集合のクラス $\mathbb{C}$ に対して，命題 $\forall A \in \mathbb{C} \neg P(A)$ は ZFC から独立である。

References

[1] E. Borel, Sur la classification des ensembles de mesure null, Bull. Soc. Math. France, vol.47(1919), 97-125.

[2] N. Bourbaki, Topologie générale, in Éléments de Mathématique, Hermann, Paris, 1958, Chap.IX, 2nd ed.

[3] K. Gödel, The consistency of the axiom choice and of the generalized continuum hypothesis, Ann. Math. Studies 3, 1940.

[4] T.J. Jech, Set theory, Academic Press, New York, San Francisco and London, 1978.

[5] C. Kuratowski, Topologie I, Warszawa 1952 (Édition Troisième, Corrigée).

[6] R. Laver, On the consistency of Borel's conjecture, Acta Math., vol.137(1976), 151-169.

[7] N. Lusin, Sur un problème de M. Baire, C.R. Acad. Sci. Paris, vol.158(1914), 1258-1261.

[8] D.A. Martin and R.M. Solovay, Internal Cohen extensions, Ann. of Math. Logic, vol.2, no.2(1970), 143-178.

[9] J. Shinoda, A note on Silver's extension, Comm. Math. Univ. Sancti Pauli, Tom.22(1973), 109-111.

[10] W. Sierpiński, Sur un ensemble non dénombrable, dont toute image continue est de mesure nulle, Fund. Math. Tom.11(1928), 301-304.

[11] H. Steinhaus, Sur les distances des points dans les ensembles de mesure positive, Fund. Math., Tom.1(1920), 93-104.

[12] P. Vopěnka and K. Hrbáček, The consistency of some theorems on real numbers, Bull. Acad. Polon. Sci., Tom.15(1967), 107-111.