数理解析研究所講究録
第 443 巻 1981 年 191-207

Geodesic flows の generic properties に関する予想とその周辺

徳島大，教養　桑原類史

Riemann幾何学に於いて，測地線の性質の研究は大きなテーマの1つである。測地線は，力学的な見方をすれば，余接バンドル上の Hamilton flow (geodesic flow と呼ばれる) としてとらえることができる。

ここでは，力学的な立場から，geodesic flows の generic な性質について，いくつかの予想とその周辺の事情を考察する。特に，geodesic flow に関する"Closing lemma"が成り立てば，ある種の性質の genericity が導びかれることを示す。

§1. 定義および Closing lemma.

Mをコンパクト，n次元，C^∞多様体 ($\partial M = \phi$)，T^*M を M上の余接バンドルとする。$(x^1, \cdots, x^n, p_1, \cdots, p_n)$ を T^*M の自然な局所座標とすれば，T^*Mは2次形式 $\omega = \sum_i dp_i \wedge dx^i$ によって定義されるシンプレクティック多様体になる。M上

の C^{k+2}- Riemann計量 g $(k \geq 0)$ に対して，T^*M 上の函数

$$H_g = \frac{1}{2}\sum_{i,j} g^{ij}(x) p_i p_j$$

を定義する。

$$X_g \lrcorner\, \omega = -dH_g \qquad (\lrcorner : \text{内部積})$$

によって定まるHamiltonベクトル場 X_g から導びかれる T^*M 上のflow $\{\varphi_t^g\}$ を geodesic flow と呼ぶ。$\{\varphi_t^g\}$ の積分曲線をM上に射影したものがRiemann多様体 (M, g) の測地線を与える。

geodesic flow $\{\varphi_t^g\}$ の周期点の全体を $\Gamma(g)$ と表わす。また，$\Omega(g)$ によって $\{\varphi_t^g\}$ の非遊走点の全体を表わすことにする。ここで，$p \in T^*M$ が非遊走点であるとは，p の任意の近傍 U および正数 T に対して，$t > T$ なる t が存在して，$\varphi_t^g(U) \cap U \neq \phi$ となることである。Mがコンパクトであるから，Poincaréの回帰定理より次が言える。
(およびLiouvilleの定理)

Lemma 1. 任意の計量 g に対して，$\Omega(g) = T^*M$。

次に，$\mathcal{R}^k$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, \infty)$ をM上の C^k- Riemann計量の全体とする。C^k- Riemann計量はM上の2階共変テンソルバンドル$\overset{S_2M}{}$の C^k-級 cross-section とみなすことができる。そして，local trivialization によって $\mathcal{R}^k$ に C^k- 位相を導入することが

できる。この様に位相を入れれば，$\mathcal{R}^k$はBaire空間になる。（実際，$\mathcal{R}^k$はBanach空間 $C^k(S_2M)$ の開部分集合である。）

<u>Remark</u>. 位相空間Eが<u>Baire空間</u>であるとは，Eの部分集合が第1類ならば，$E \setminus A$ がEでdenseであることである。また，これは次の様に言いかえてもよい：EがBaire空間である。

$\Leftrightarrow$ Eの開集合 $O_1, O_2, \cdots$ のどれもがEでdenseならば，
$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ もEでdenseである。

さて，以上の準備の下にClosing lemmaを述べる。

<u>C^k-closing lemma</u>. $g \in \mathcal{R}^k$ $(k=0,1,2,\cdots,\infty)$ で，p^* を T^*M の任意の点とする。このとき，$\mathcal{R}^k$ における g の任意の近傍 U に対して，$p^* \in \Gamma(g')$ を満たす g' が U 内に存在する。

残念ながら，$k \geq 1$ に対してこのlemmaは証明されていない。これに関しては§3で考察する。

§2. Geodesic flowsのgeneric properties.

この節では，geodesic flowsのgenericな性質に関する次の予想とClosing lemmaの関係を論じる。すなわち，次の図式

を示す。

$$\boxed{\text{Closing lemma} \Longleftrightarrow \text{Conjecture 1} \Longrightarrow \text{Conjecture 2}}$$

（ここで，$A \Longrightarrow B$ は，命題 A から命題 B が導びかれることを表す。）

Conjecture 1. $\mathcal{R}^k$（$k \geq 3$）の residual subset S^k が存在し，$g \in S^k$ ならば

$$\bar{\Gamma}(g) = T^*M \quad (\ \bar{\Gamma}(g) \text{ は } \Gamma(g) \text{ の閉包である。})$$

となる。

Definition. T^*M 上の C^∞ 函数 f が geodesic flow $\{\varphi_t^g\}$ の第1積分であるとは，次の２条件が満たされることである；

(i) $\{\varphi_t^g\}$ の任意のエネルギー曲面 $H_g = const.$ 上の任意の開集合で f は定数とはならない。

(ii) $X_g f = 0$.

Conjecture 2. $\mathcal{R}^k$（$k \geq 3$）の residual subset S^k に対して，$g \in S^k$ ならば $\{\varphi_t^g\}$ は第1積分を持たない。

Remarks 1. 位相空間 E の部分集合 A が residual であるとは A が可算個の open かつ dense な E の部分集合の共通部分であ

ることである。EがBaire空間ならばAはEでdenseである。ある性質Pがresidualな部分集合の元に対して成立する時，性質Pは<u>generic</u>であると呼ばれる。

2. $\bar{\Gamma}(g) \neq T^*M$ であるような計量 g の具体的な例はWeinstein [1] によって与えられている。

3. $\xi = \xi^i \partial/\partial x^i$ を (M, g) のKillingベクトルとすれば，ξ より定義される函数 $f(x,p) = \sum_i \xi^i p_i$ は $\{\varphi_t^g\}$ の第1積分である。Killingベクトル場が存在しないような C^∞ 計量の全体が $\mathcal{R}^\infty$ においてopenかつdenseであることが知られている（e.g. Ebin [2]）。

いくつかの準備をする。

円周 S^1 からMへの完全連続写像 γ で，$\dot{\gamma}$ が2乗可積分であるものの全体を $\Lambda(M)$ で表わす．Riemann計量 g に対して，

$$E_g : \Lambda(M) \longrightarrow \mathbf{R} \quad ; \quad \gamma \longmapsto \int_{S^1} |\dot{\gamma}|_g^2$$

が定義される。このとき，

$\gamma \in \Lambda(M)$ が (M, g) の閉測地線 $\Leftrightarrow$ γ が E_g のcritical point.

さて，E_g のcritical valueの全体を $\mathcal{L}_g$ とする。

<u>Definition.</u> $g \in \mathcal{R}^k$ $(k \geq 2)$ が<u>bumpy metric</u>であるとは，任意の $c \in \mathcal{L}_g \setminus \{0\}$ に対して，$E_g^{-1}(c)$ が $\Lambda(M)$（Hilbert多様体）

の非退化な critical submanifold であることである（see Abraham [3]）。

Definition. γ を $\{\varphi_t^g\}$ の周期軌道とする。γ が 1-elementary であるとは，γ に associate した Poincaré 写像 $P_\gamma : \Sigma \to \Sigma$ に対して，$dP_\gamma : T\Sigma_{\gamma(0)} \to T\Sigma_{\gamma(0)}$ が固有値 1 を持たないことである（see Klingenberg [4, Ch.3]）。さらに，$g \in \mathcal{R}^k$ $(k \geq 2)$ が 1-elementary であるとは，$\{\varphi_t^g\}$ の全ての周期軌道が 1-elementary であることである。

Lemma 2 (Bott [5]). g が bumpy metric であれば，g は 1-elementary である。

（証明） g が bumpy metric であることは，(M, g) の任意の閉測地線 γ の nullity $\nu(\gamma)$ が零であることと同値である。さらに，$\nu(\gamma)$ は γ に沿う Jacobi 場 Y で $Y(0) = Y(1)$, $\langle Y(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0$ を満たすものの全体から成るベクトル空間の次元である。従って，$\nu(\gamma) = \text{dimension of } \ker(dP_\gamma - I)$. ▨

ここで，Baire 空間上の集合値函数に関する若干の復習をする（see Robinson [6, p.599-p.601]）。

Y を距離空間（距離 d）とする。Y のコンパクト閉部分集

合の全体を 2^Y と表わす。2^Y には次の様な距離 d が定義される; $A_1, A_2 \in 2^Y$ に対して,

$$d(A_1, A_2) := \max\left(\sup_{a_1 \in A_1} d(a_1, A_2), \sup_{a_2 \in A_2} d(A_1, a_2)\right).$$

X を Baire 空間とし, $f : X \to 2^Y$ を集合値函数とする。f が $x_0 \in X$ において下半連続であるとは, $\forall \varepsilon > 0$ に対して, x_0 の近傍 U が存在して, $d(z, f(y)) < \varepsilon$ for $\forall z \in f(x_0)$, $\forall y \in U$ となることである。

Lemma 3. $f_n : X \to 2^Y$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を下半連続な集合値函数族とし, $f_n(x) \subset f_{n+1}(x)$ が満たされているとする。このとき, $f(x) := \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(x)}$ で定義される $f : X \to 2^Y$ は下半連続である。

Lemma 4. $f : X \to 2^Y$ を下半連続な集合値函数とする。このとき, f が連続である様な点の全体は X の residual subset である。

さて, Closing lemma と Conj. 1 の同値性を示そう。その為の lemmas を述べる。

Lemma 5. (Eells-Lemaire [7], Koiso [8]). $g \in \mathcal{R}^k$ $(k \geq 3)$ で, $\tilde{\gamma}$ を $\{\varphi_t^g\}$ の周期軌道とする。$\tilde{\gamma}$ が 1-elementary ならば, 2^{T^*M}

における $\tilde{\gamma}$ の任意の近傍 U に対して，g の近傍 $V(\subset \mathcal{R}^k)$ が存在して，$g' \in V$ ならば，$\{\varphi_t^{g'}\}$ の周期軌道 $\tilde{\gamma}'$ で $\tilde{\gamma}' \in U$ となるものが存在する。

<u>Lemma 6.</u> $\tilde{p}, \tilde{q}$ を T^*M の異なる２点とする。このとき，$g \in \mathcal{R}^k$ の任意の近傍 U に対して，正数 C が存在して，$\tilde{d}(\tilde{p}, \tilde{q}) < C$ ならば，M の C^∞ 微分同相写像 Φ で，$\tilde{\Phi}(\tilde{p}) = \tilde{q}$, $\Phi^* g \in U$ となるものが存在する。ここで，$\tilde{d}(\cdot, \cdot)$ は T^*M 上の適当に定義された距離，$\tilde{\Phi}: T^*M \to T^*M$ は Φ の自然な lift である。

（証明は容易である。）

さて，$g \in \mathcal{R}^k$ に対して，$S_g^*M := \{\tilde{p} \in T^*M;\ H_g(\tilde{p}) = 1\}$ とおく。S_g^*M は T^*M のコンパクト部分集合であり，(M, g) の閉測地線 γ と $\{\varphi_t^g\}$ の S_g^*M 上の周期軌道 $\tilde{\gamma}$ は１対１に対応する（$\pi(\tilde{\gamma}) = \gamma$）。$M$ 上の bumpy C^k-metric の全体を $\mathcal{R}_B^k$ で表わす。

<u>Lemma 7.</u> $k \geqq 3$ とする。

(1) $\mathcal{R}_B^k$ は $\mathcal{R}^k$ の residual subset である。

(2) $g \in \mathcal{R}_B^k$ ならば，$\forall C > 0$ に対して，$E_g(\gamma) < C$ となる閉測地線 γ は有限個である。

(3) $\Gamma_{1,n} : \mathcal{R}_B^k \to 2^{T^*M}$ $(n = 1, 2, \cdots)$

$$g \mapsto \bigcup_i \tilde{\gamma}_i \quad \left(\begin{array}{l} \tilde{\gamma}_i : \tilde{\gamma}_i \subset S_g^*M \text{ かつ } E_g(\pi(\tilde{\gamma}_i)) < n \text{ を満たす} \\ \{\varphi_t^g\} \text{ の周期軌道} \end{array} \right)$$

は下半連続な集合値函数である。

（証明）(1) Abraham [3] 又は Klingenberg [4, Ch.3] を参照せよ。

(2) $E_g(\gamma) < C$ を満たす閉測地線が無限個あったとすると，E_g が Palais-Smale の条件を満たすことから，

$$^\exists \{\gamma_n : \text{閉測地線}\}_{n=1}^{\infty} \ s.t. \ \gamma_n \to \gamma_0 \ (\text{一様収束}).$$

ここで，γ_0 は $E_g(\gamma_0) \leq C$ を満たす閉測地線である。これは，E_g が non-degenerate な critical submanifold のみを持つことに矛盾する。

(3) (1)より $\Gamma_{1,n}(g)$ は有限個の周期軌道 $\tilde{\gamma}_1, \cdots, \tilde{\gamma}_k$ から成る。Lemma 5 より各 $\tilde{\gamma}_i$ に対して，g の近傍 U_i が存在して，$g' \in U_i$ ならば，$\{\varphi_t^{g'}\}$ の周期軌道 $\tilde{\gamma}_i'$ で $\tilde{d}(\tilde{\gamma}_i, \tilde{\gamma}_i') < \varepsilon/2$，かつ (*) $|E_{g'}(\pi(\tilde{\gamma}_i')) - 1| < \varepsilon/2$ となる。$\tilde{\gamma}_i'' := \pi^{-1}(\pi(\tilde{\gamma}_i')) \cap S_{g'}^*M$ とすれば，(*) より $\tilde{d}(\tilde{\gamma}_i'', \tilde{\gamma}_i') < \varepsilon/2$ となる。従って，$\tilde{d}(\tilde{\gamma}_i, \tilde{\gamma}_i'') < \varepsilon$，すなわち $\tilde{d}(\tilde{\gamma}_i, \Gamma_{1,n}(g')) < \varepsilon$。$U = \bigcap_{i=1}^{k} U_i$ とおけば，U は g の近傍で，$g' \in U$ ならば $\tilde{d}(\tilde{\gamma}_i, \Gamma_{1,n}(g')) < \varepsilon$ となる。▨

$\mathcal{R}_B^k$ は $\mathcal{R}^k$ の dense subset だから，Baire 空間である。Lemma 3 より $\overline{\Gamma}_1(g) := \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_{1,n}(g)}$ は $\mathcal{R}_B^k$ の下半連続函数であ

る。明らかに,

$$\overline{\Gamma}_1(g) = S_g^* M \iff \overline{\Gamma}(g) = T^* M \ .$$

$\mathcal{S}^k$ を $\overline{\Gamma}_1$ が連続である様な $g \in \mathcal{R}_B^k$ の全体とする。Lemma 4 より $\mathcal{S}^k$ は $\mathcal{R}_B^k$ の *residual subset* であるから, $\mathcal{R}^k$ の *residual subset* である。

【A】 <u>$k \geqq 3$ に対して, C^k-*closing lemma* から *Conj.* 1 が従うこと.</u>

$g_0 \in \mathcal{S}^k$ に対して, $\overline{\Gamma}_1(g_0) = S_{g_0}^* M$ であることを示す。$\tilde{p} \in S_{g_0}^* M$ かつ, $\tilde{p} \notin \overline{\Gamma}_1(g_0)$ とする。C^k-*closing lemma* より g_0 の近傍 $\mathcal{U}$ $(\subset \mathcal{R}^k)$ 内に $\tilde{p} \in \overline{\Gamma}(g^{(1)})$ となる $g^{(1)}$ が存在する。$\tilde{p}$ を通る周期軌道を $\tilde{\gamma}$ とする。Klingenberg [4, Proposition 3.3.7] によれば $g^{(1)}$ に任意に近い計量 $g^{(2)} \in \mathcal{U}$ で, $\pi(\tilde{\gamma})$ が $(M, g^{(2)})$ の閉測地線であり, $\tilde{\gamma}' := \pi^{-1}(\pi(\tilde{\gamma})) \cap S_{g^{(2)}}^* M$ が $\{\varphi_t^{g^{(2)}}\}$ の 1-*elementary* な周期軌道であるようにできる。$\tilde{p}' = \pi^{-1}(\pi(\tilde{p})) \cap \tilde{\gamma}'$ とおけば, $\tilde{p}$ と $\tilde{p}'$ は任意に十分近い。$\mathcal{R}_B^k$ が $\mathcal{R}^k$ で *dense* であることと, $\tilde{\gamma}'$ が 1-*elementary* であることから, $g^{(3)} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{R}_B^k$ が存在し, $\{\varphi_t^{g^{(3)}}\}$ の周期点 $\tilde{q}$ が $\tilde{p}'$ の十分近くにあるようにできる。さて, Lemma 6 から M の C^∞ 微分同相写像 Φ を $\tilde{\Phi}(\tilde{p}) = \tilde{q}$, かつ $g^{(4)} \equiv \Phi^* g^{(3)}$ が g に十分近いようにとることができる。このとき, $g^{(4)} \in \mathcal{R}_B^k \cap \mathcal{U}$ かつ $\overline{\Gamma}(g^{(4)}) \ni \tilde{p}$ である. $H_{g^{(4)}}(\tilde{p}) = 1 + \varepsilon$ $(|\varepsilon| \ll 1)$ とすると, $g = g^{(4)}/(1+\varepsilon)$ とおけば $\overline{\Gamma}_1(g) \ni \tilde{p}$, かつ

$g \in R_B^k \cap \mathcal{U}$ とできる。この様にして，R_B^k 内の列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ で，$g_n \to g_0$，かつ $\tilde{p} \in \bar{\Gamma}_1(g_n)$ となるものがとれる。ところで，$\bar{\Gamma}_1$ は g_0 で連続だから，$\tilde{p} \in \bar{\Gamma}_1(g_0)$ となる。これは矛盾である。▨

【B】 Conj. 1 から Closing lemma が従うこと．

$g \in R^k$, $\tilde{p} \in T^*M$ とする。$\mathcal{U}$ を g の任意の近傍とすると，Conj. 1 より，$\exists g' \in \mathcal{U}$ s.t. $\bar{\Gamma}(g') \ni \tilde{p}$。 $\tilde{p} \notin \Gamma(g')$ とする（$\tilde{p} \in \Gamma(g')$ ならば証明おわり）。$\tilde{p}$ の十分近くに $\tilde{p}' \in \Gamma(g')$ が存在する。Φ を M の C^∞ 微分同相写像で $\tilde{\Phi}(\tilde{p}) = \tilde{p}'$，$g'' \equiv \Phi^* g' \in \mathcal{U}$ となるものとする（Lemma 6）。このとき，$\tilde{p} \in \Gamma(g'')$ が成り立つ。▨

【C】 Conj. 1 から Conj. 2 が従うこと．

Proposition 1. $g \in R^k$ ($k \geq 2$) が 1-elementary，かつ $\bar{\Gamma}(g)$ の内部が空集合でないとする。このとき，$\{\varphi_t^g\}$ は第1積分を持たない。

（証明）第1積分 F が存在したとすると，$\mathrm{Int}\, \bar{\Gamma}(g) \neq \phi$ だから，$\tilde{g} \in \Gamma(g)$，かつ $(dH_g \wedge dF)_{\tilde{g}} \neq 0$ となる点 $\tilde{g} \in T^*M$ が存在する。$\tilde{g}$ を通る周期軌道を $\tilde{\gamma}$ とする。$\tilde{g}$ の近傍における T^*M の局所座標として $(y^1 = t, y^2 = H_g, y^3 = F, \cdots, y^{2n})$ ととれる。ここで，t は $\tilde{\gamma}$ に沿う時間パラメータである。

$$P : (y^3 = F, \cdots, y^{2n}) \longrightarrow (y^3, \cdots, y^{2n})$$

を $\tilde{\gamma}$ に沿う Poincaré 写像とする。F が第1積分だから，

$$(dP)_g = \left(\begin{array}{c:c} 1 & 0 \\ \hdashline * & * \end{array}\right)$$

となり，$(dP)_g$ は固有値1をもつ。従って，g は1-elementary でない。これは矛盾である。 ▨

Conj. 1 と Proposition 1 を合わせれば，$g \in S^k$ なる g に対して，g は第1積分を持たない。従って，Conj. 2 が導びかれる。

§3. Closing lemma の"証明"について.

一般の flow の C^1-closing lemma は C. C. Pugh [9, 10] で証明された。その証明は，考えている点 p の近傍で，ベクトル場を摂動することによって点 p が周期点であるようにすることである。そのとき，ベクトル場の摂動を C^1-位相の意味で任意に小さくする為の工夫が極めて複雑であり，その方法を C^k $(k \geqq 2)$-位相まで拡張することは成功していない。又，Hamiltonian flow について，C^1-closing lemma は R. C. Robinson [6] で述べられている。その証明は一般の flow の場合の証明がそのまま適用される。geodesic flow も一種の Hamiltonian flowであるが，geodesic flowの場合，摂動する要素は計量$g_{ij}(x)$だけであり，一般のHamiltonian flowの場合よりも摂動の自由度が少ないことが，証明の困難さを増すことになる。従って，今のところ，$C^k\ (k\geq 1)$-位相について geodesic flowのclosing lemmaは証明されていない（と思う）。

この節では，C^0-closing lemmaの証明の概略を与える。そして，それを$C^k\ (k\geq 1)$-位相に拡張する困難さを見ることにする。

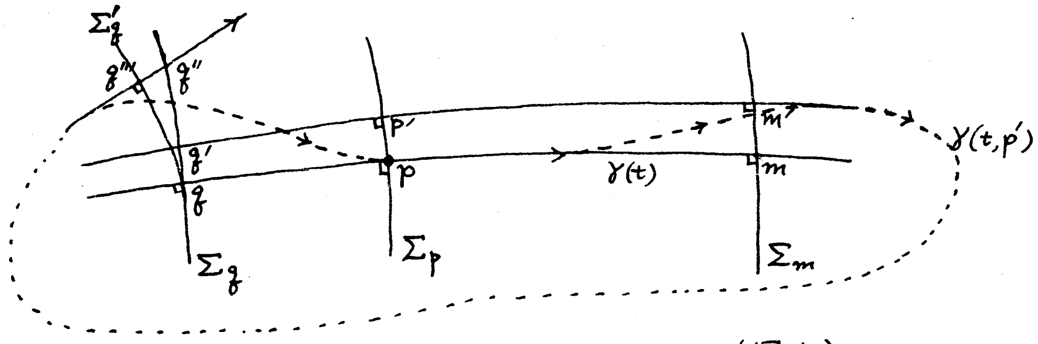
gをRiemann計量，$\tilde{p}\in T^*M$，$p=\pi(\tilde{p})\in M$とする。$\tilde{p}$を初期点とする$\{\varphi_t^g\}$の積分曲線を$\tilde{\gamma}(t)$とし，$\gamma(t)=\pi(\tilde{\gamma}(t))$とする。ただし，$\gamma(t)$は$\|\dot{\gamma}(t)\|=1$かつ$\gamma(0)=p$とする。$\Sigma_p$を$p$において$\dot{\gamma}(0)$に直交する小さな超曲面とする。$\Sigma_p$と$\Sigma_p$の焦点の距離を$\delta(>0)$とする。$\Sigma_p$上の点$u$を初期点とし，$\Sigma_p$に直交する測地線族$\gamma(t,u)$を考える。

$$\left.\begin{array}{ll} m=\gamma(\delta/2,p), & \Sigma_m=\gamma(\delta/2,\Sigma_p) \\ q=\gamma(-\delta/4,p), & \Sigma_q=\gamma(-\delta/4,\Sigma_p) \end{array}\right\}\text{とおく.}$$

$\Sigma_m,\Sigma_p,\Sigma_q$は互いに微分同型である。

T^*M上の任意の点は非遊走点だから（Lemma 1），$\forall\varepsilon, N(>0)$に対して，次を満たす$\Sigma_p$上の点$p'$が存在する；

(C.1) $d(q,q')<\varepsilon/2$, $d(m,m')<\varepsilon/2$ ただし，$q'=\gamma(-\delta/4,p')$



（図1）

$m' = \gamma(\delta/2, p')$ である。

(C.2) $\exists T > 0$ s.t. $\begin{cases} q'' = \gamma(T, p') \in \Sigma_q \\ d(q'', q) = \varepsilon' < \varepsilon \\ \langle \dot{\gamma}(T, p'), \mathbb{Z} \rangle < \varepsilon'/N \quad \text{for } {}^\forall \mathbb{Z} \in T_{q''}(\Sigma_q) \quad \|\mathbb{Z}\| = 1 \end{cases}$

このとき，Σ'_q を Σ_q の微小変形として，

$$\begin{cases} \gamma(T', p') \equiv q''' \in \Sigma'_q, & \gamma(-\delta/4, p) = q \in \Sigma'_q \\ \dot{\gamma}(T', p') \perp \Sigma'_q, & \dot{\gamma}(-\delta/4, p) \perp \Sigma'_q \end{cases}$$

となるようにする。

Σ'_q に直交する測地線族を $\gamma'(t, u)$ とする。($\gamma'(0,u) = u \in \Sigma'_q$, $\gamma'(t, q) = \gamma(t - \delta/4, p)$ である。) いま，S_q を q''', q を含む Σ'_q の開部分集合で $\overline{S_q}$ がコンパクトであるものとする。そして $\phi: \Sigma'_q \to \Sigma'_q$ を

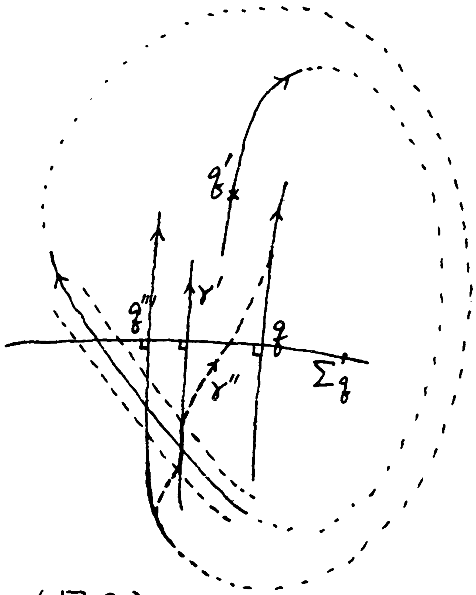
$$\phi(q''') = q, \text{ かつ } \phi = id. \text{ in } \Sigma'_q \setminus S_q$$

となる C^∞ 微分同相写像とする。このとき，Gluck and Singer [11, Theorem 1'] より，g を Σ'_q の近傍で変形した計量 g' が存在して，$u \in \Sigma'_q$ を通る測地線 $\gamma'(t, u)$ と $\phi(u)$ を通る測地線

$\gamma'(t,\phi(u))$ をなめらかに結ぶ曲線が (M,g') の測地線になるようにすることができる。

同様に，Σ_m の近傍で g を変形して，m を通る測地線と m' を通る測地線をなめらかに結ぶ測地線を作ることができる。この様にして，p を通る閉測地線を持つ様な計量 g' を構成することができる。これを T^*M に持ち上げれば，$\{\varphi_t^{g'}\}$ は $\tilde{p}$ を周期点としてもつ様にできたことになる。

さて，g と g' の差を評価しなければならない。その為に，Gluck-Singer の議論をもう少し詳しく述べる。計量 g' の構成は，まず $\gamma'(t,u)$ と $\gamma'(t,\phi(u))$ をなめらかに結ぶ曲線族 $\gamma''(t)$ を構成し，その曲線族から g' を構成するという方法である。そして，g と g' の差は $\dot{\gamma}'$ と $\dot{\gamma}''$ の差で評価できる。



（図２）

ここで注意したいことは，g' を出発した測地線が g''' へ至る途中で何度も Σ_g' の近傍を通る可能性があることである。従って，Σ_g' の近傍の計量を勝手に変形すると，途中の軌道が変わって，g''' へ至らなくなってしまう。それを避ける為には，途中，Σ_g' と交わる部分の管状近傍では，

$\gamma''=\gamma'$ となるようにしなければならない（図2）。以上の様な状況で，g''' と g が任意に近くできるならば（任意の点 $\in T^*M$ が非遊走点だから，これは可能），管状近傍を十分小さくとることによって，$\dot{\gamma}'$ と $\dot{\gamma}''$ の差は C^0-位相の意味ではいくらでも小さくできる。従って，g と g' は C^0-位相でいくらでも近くできる。

ところが，$\gamma''=\gamma'$ とするべき領域が増えることによって，C^k $(k\geqq 1)$-位相では，$\dot{\gamma}'$ と $\dot{\gamma}''$ は近くすることができない。

この様に，ある点のまわりの計量のみを変形して，閉測地線を構成することによって C^k $(k\geqq 1)$-*closing lemma* を示すことは非常に難しい。例えば，不動点定理のようなものによって，非構成的な証明を工夫する必要があるように思う。

(1981. 10. 22)

REFERENCES

[1] A. Weinstein, Sur la non-densité des géodésiques fermées, C.R. Acad. Sci. Paris 271(1970), 504.

[2] D. Ebin, The manifold of Riemannian metrics, Proc. Sympos. Pure Math. 15, Amer. Math. Soc. 1970, 11-40.

[3] R. Abraham, Bumpy metrics, Proc. Sympos. Pure Math. 14, Amer. Math. Soc. 1970, 1-3.

[4] W. Klingenberg, Lectures on Closed Geodesics, Springer-Verlag, 1978.

[5] R. Bott, On the iteration of closed geodesics and the Sturm intersection theory, Comm. Pure Appl. Math. 9(1956), 171-206.

[6] R.C. Robinson, Generic properties of conservative systems, Amer. J. Math. 92(1970), 562-603.

[7] J. Eells and L. Lemaire, Deformations of metrics and associated harmonic maps, "Geometry and Analysis"(Papers dedicated to the Memory of V.K. Patodi).

[8] N. Koiso, Variation of harmonic mapping caused by a deformation of Riemannian metric, Hokkaido Math. J. 8(1979), 199-213.

[9] C.C. Pugh, The closing lemma, Amer. J. Math. 89(1967), 956-1009.

[10] _____, An improved closing lemma and a general density theorem, Amer. J. Math. 89(1979), 1010-1021.

[11] H. Gluck and D. Singer, Scattering of geodesic fields,I, Ann. of Math. 108(1978), 347-372.