数理解析研究所講究録
第447巻 1981年 95-99

2次元複素トーラスの自己準同形環

筑波大大学院数学研究科
清水 敦

$\mathbb{T}$、$\mathbb{T}'$を、それぞれn、n'次元の複素トーラスとする。$\mathbb{T}$から$\mathbb{T}'$への準同型全体$\mathrm{Hom}(\mathbb{T}, \mathbb{T}')$は階数$2nn'$以下の$\mathbb{Z}$自由加群である。

定理1. もし、$\mathrm{Hom}(\mathbb{T}, \mathbb{T}')$の階数が$2nn'$に等しければ、$\mathbb{T}$、$\mathbb{T}'$は、ある一次元複素トーラス$\mathbb{T}_0$のそれぞれ$n$、$n'$この直和にisogenousである。

とくに$\mathbb{T} = \mathbb{T}'$のときを考えよう。そのとき$\mathrm{Hom}(\mathbb{T}, \mathbb{T}')$は自己準同型環$\mathrm{End}(\mathbb{T})$になる。一般には$\mathrm{End}(\mathbb{T}) \simeq \mathbb{Z}$である。では$\mathrm{End}(\mathbb{T}) \not\simeq \mathbb{Z}$のとき$\mathbb{T}$はどんなものであろうか?

$\mathrm{End}(\mathbb{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$のことを$\mathrm{End}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{T})$とかき、以下これを考察する。2次元トーラス$\mathbb{T}$について、$\mathrm{End}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{T})$のおこりうるすべての形を考え、それに従って2次元トーラスを分類することを目標とする。次の定理がほぼ完全な回答を与える。

定理2 $\mathbb{T}$を自明でない自己準同型をもつ(すなわち$\mathrm{End}(\mathbb{T})$

$\cong \mathbb{Z}$であるような）２次元複素トーラスとする。その時、$\mathbb{T}$は次のいずれかの型の$\mathbb{C}$トーラスに isogenous である。

A）２つの一次元トーラス$\mathbb{T}'$、$\mathbb{T}''$の直和 $\mathbb{T}=\mathbb{T}'\oplus\mathbb{T}''$。

i) $\mathbb{T}'$、$\mathbb{T}''$が isogenous のとき。$\mathrm{End}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{T})\cong M_2(\mathrm{End}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{T}'))$（すなわち、斜体$\mathrm{End}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{T})$を係数とする２次の全行列環）であり、$\mathbb{T}'$が complex multiplication をもつかもたないかに従って、$\mathrm{End}(\mathbb{T})$の階数は４か８になる。

ii) $\mathbb{T}'$、$\mathbb{T}''$が isogenous でない時。$\mathrm{End}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{T})\cong\mathrm{End}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{T}')\oplus\mathrm{End}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{T}'')$であり、$\mathbb{T}'$、$\mathbb{T}''$が complex multiplication を、両方とも持つ一方だけがもつ、両方とも持たない、のそれぞれに従って、$\mathrm{End}(\mathbb{T})$の階数はそれぞれ４．３、２となる。

B）単純―すなわち部分トーラスを$\{0\}$と自分自身以外にもたない場合。

i) $$\mathbb{T}_0(\zeta,\xi)=\mathbb{C}^2\Big/\begin{bmatrix}1&\zeta&\zeta^2&\zeta^3\\1&\xi&\xi^2&\xi^3\end{bmatrix}$$

（ここで右辺の記号は$\mathbb{C}^2$をその中の格子群

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\mathbb{Z}+\begin{bmatrix}\zeta\\\xi\end{bmatrix}\mathbb{Z}+\begin{bmatrix}\zeta^2\\\xi^2\end{bmatrix}\mathbb{Z}+\begin{bmatrix}\zeta^3\\\xi^3\end{bmatrix}\mathbb{Z}$$

でわって得られる２次元複素トーラスを意味する。以下出てくる同様の記号も同じように解釈する。）

ただし、ζ．ξは$\mathbb{Q}$上４次の共役な代数的数で、ζ．

ξ、$\bar{\zeta}$、$\bar{\xi}$がζのすべての共役を与える。$F=\mathbb{Q}(\zeta,\xi,\bar{\zeta},\bar{\xi})$のガロア群を$G$とし、$\zeta$、$\xi$、$\bar{\zeta}$、$\bar{\xi}$をそれぞれ1、2、3、4に対応させて$G\hookrightarrow S_4$とみなすとき、$G\neq V_4$かつ、$G\neq V_4\cup(1,2)V_4$ （$V_4=\{1,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$）であるとする。

このとき、$\mathbb{T}_0(\zeta,\xi)$ は単純で、$\mathrm{End}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{T})\simeq\mathbb{Q}(\zeta)$。

ii) $$\mathbb{T}_1(m;b,d)=\mathbb{C}^2\Big/\begin{bmatrix}1 & \sqrt{m} & b & b\sqrt{m}\\ 1 & -\sqrt{m} & d & -d\sqrt{m}\end{bmatrix}$$

ここで、mは2乗因子を含まない1でない整数。b、$d\in\mathbb{C}$は、$bd=q\in\mathbb{Q}\setminus N_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})/\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt{m}))$ かつ、0でない$z\in\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ に対し、$zb+z^{\sigma}d\notin\mathbb{Q}$であるとする（ただし$z\in\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ に対しz^{σ}は$\mathbb{Q}$上でのzの共役元、又、$N_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})/\mathbb{Q}}(z)=zz^{\sigma}$ ）。さらに$m>0$ならb、$d\notin\mathbb{R}$、$m<0$なら$b\neq\bar{d}$とする。

このとき $\mathbb{T}_1(m;b,d)$ は単純で、

$$\mathrm{End}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{T}_1(m;b,d))\simeq(m,q)_{\mathbb{Q}}$$

（$(m,q)_{\mathbb{Q}}$は$\mathbb{Q}$上単位元1、および、e_1、e_2、e_3ではられる4元数環で、$e_1e_2=-e_2e_1=e_3$、$e_1^2=m$、$e_2^2=q$をみたすもの）

iii) $$\mathbb{T}_2(m;b,d)=\mathbb{C}^2\Big/\begin{bmatrix}1 & \sqrt{m} & b & \sqrt{m}b\\ 1 & -\sqrt{m} & d & -\sqrt{m}d\end{bmatrix}$$

ただし、mは2乗因子を含まず、1でもない整数。又、$2xbd + zb + z^{\sigma}d + 2y = 0$（$x, y \in \mathbb{Q}$、$z \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$）なら $x = y = z = 0$ とする。さらに、$m > 0$ なら b、$d \notin \mathbb{R}$、$m < 0$ なら $b \neq \bar{d}$ とする。

この時、$\mathbb{T}_2(m; b, d)$は単純で、

$$\mathrm{End}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{T}_2(m; b, d)) \simeq \mathbb{Q}(\sqrt{m})$$

c）単純でも、直和でもない時。

i）
$$\mathbb{T}_3(m; w) = \mathbb{C}^2 \Big/ \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{m} & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{m} \end{bmatrix}$$

mは2乗因子を含まず1でもない負の整数。wは、$\mathbb{Q}(\sqrt{m})$に入らない複素数。このとき、

$$\mathrm{End}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{T}_3(m; w)) \simeq (m, 0)_{\mathbb{Q}}$$

ii）
$$\mathbb{T}_4(z, w) = \mathbb{C}^2 \Big/ \begin{bmatrix} 1 & z & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 & z \end{bmatrix}$$

zは$\mathbb{Q}$上の2次体に入らず、かつ $w \notin \mathbb{Q} + \mathbb{Q}z + \mathbb{Q}z^2$ とする。このとき

$$\mathrm{End}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{T}_4(z, w)) \simeq \mathbb{Q}[X] \Big/ (X^2)$$

上の分類は$\mathrm{End}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{T})$による$\mathbb{T}$の isogenous class の分類になっていることに注意しよう。実際、それぞれの型に現われる$\mathrm{End}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{T})$はお互いに同型でない。従ってそれぞれの型に属することが、それぞれの型の$\mathrm{End}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{T})$をもつための必要十分条

件になる。例えば、ある m に対し、$\mathrm{End}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{T}) \simeq (m, 0)_{\mathbb{Q}}$ なる2次元複素トーラス $\mathbb{T}$ はC)-i)の型に属することがいえる。

さて、上にあげたうちA)に属するトーラスは射影的、すなわちアーベル多様体であり、C)はそうでない。B)については次の定理によって判定ができる。

定理3　単純2次元複素トーラス $\mathbb{T}$ は、自明でない自己準同型をもつとする。

$\mathbb{T}$ がアーベル多様体であるための必要十分条件は $\mathrm{End}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{T})$ が、実の2次体を含むことである。

参考文献

[1] 清水　敦　　複素トーラスの自己準同型環について　筑波大学大学院中間報告(1980)

[2] 小泉　正二　　テータ函数　　上智大学レクチャーノート(1978)

[3] H. Yoshihara　The structure of complex tori with the automorphisms of maximal degree.　Tsukuba J. Math. vol.4 No.2 December 1980