数理解析研究所講究録
第449巻 1982年 102-118

非定常Navier-Stokes方程式に対する有限要素法の数学的考察

東大 理学部 藤田 宏
岡本 久

§1 序.

この小論においてわれわれは，非定常Navier-Stokes方程式に対する有限要素法を用いたモデルスキームと，その誤差評価について述べる。近年この分野に対する関心が増々高まってきているように思われるが，中でもフランスのI.N.R.I.A.研究所のGlowinski及び彼の周辺の人々によって行なわれている研究には注目すべきものが多い。彼らが近似しているのは，定常状態のStokes方程式が主であるが，例えば，区分的に1次の要素を用いたとき，誤差がh (= mesh size) のオーダーである，などという事実は彼らによって初めて証明されたものであろう。

さて，時間に依存する場合のStokes方程式あるいはNavier-Stokes方程式に対する誤差評価については，定常状態の場合とは別の技巧が必要であり，これまでほとんど手がつけら

れていない。われわれはこの小論において，空間変数xについて離散化し，時間tについてはそのままとしたときに，誤差がoptimal orderになり，熱方程式の場合について知られている事実のアナロジーが成立することを示そうと思う。

§2　問題の定式化

Fujita-Kato [3] に従って関数解析的手法を用いたい。そのために必要な概念と記号を念のため以下に記す。

Ω ------ $\mathbb{R}^2$もしくは$\mathbb{R}^3$の中の多角形領域(多面体領域)

$\partial\Omega$ ------ Ωの境界，$\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$

$L^2(\Omega)^k$ ------ Ωで定義され，$\mathbb{R}^k$に値をとるベクトル値関数で，Ω上2乗可積分なもの全体。($k=1$のときは1をかかない。)

ノルム：$\|f\|_0=\left(\int_\Omega |f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$，内積 (f,g)

$H^m(\Omega)^k$ ------ $L^2(\Omega)^k$に属する関数で，m階までのすべての導関数がΩで2乗可積なもの全体。

ノルム：$\|f\|_m=\left\{\sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega |D^\alpha f(x)|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}$

$X\equiv H_0^1(\Omega)^k$ ------ $H^1(\Omega)^k$の要素で$\partial\Omega$上0となるもの全体

$V\equiv\{v\in X;\ \mathrm{div}\,v=0\}$

$H\equiv\{v\in L^2(\Omega)^k;\ \mathrm{div}\,v=0,\ v\cdot n=0\}$

nは$\partial\Omega$における外向き法線ベクトル

$C(\overline{\Omega})^k$ ------ $\overline{\Omega}$で定義され，$\mathbb{R}^k$に値をとる連続関数全体

さて，考える方程式は次の2つである。

Stokes 方程式（非定常）：

$$(S)_1 \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla p = 0 & t>0,\ x \in \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{〃} \\ u|_{\partial\Omega} = 0 & \\ u|_{t=0} = a(x) & \end{cases}$$

Navier-Stokes 方程式（非定常）：

$$(N.S)_1 \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = 0 & t>0,\ x \in \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{〃} \\ u|_{\partial\Omega} = 0 & \\ u|_{t=0} = a(x) & \end{cases}$$

いずれの場合にも，諸々の定数は適当に正規化することによって1に等しいとしてあり，外力はないものとしておく。外力がある場合の誤差評価については，Fujita-Mizutani[6] p762−764 を参照していただきたい。

まず，Stokes 方程式について考えよう。Fujita-Mizutani [6] の方法が使えるように $(S)_1$ を次のように定式化する。

$$(S)_2 \begin{cases} \left(\frac{du}{dt}, v\right) + (\nabla u(t), \nabla v) - (\operatorname{div} v, p(t)) = 0 \quad (t>0,\ v \in X) \\ t>0 \implies u(t) \in V \\ u(0) = a \end{cases}$$

ここで，uは区間$[0,\infty[$で定義され，Hに値をとる関数とみなし，pは区間$]0,\infty[$で定義され，Mに値をとる関数とみなしている。初期値aについては $\underline{\underline{a \in H}}$ を仮定しておく。

次に，$(S)_2$ から圧力Pを消去して，速度uだけの定式化をすると，

$$(S)_3 \begin{cases} \frac{du}{dt} + Au(t) = 0 & t>0 \\ u(0) = a \end{cases}$$

となる。ここに，AはStokes作用素と呼ばれるH上の正値自己共役作用素で，条件

$$(Aw, v) = (\nabla w, \nabla v) \qquad (w \in D(A),\ v \in V)$$

によって特徴づけられる。$D(A)$はAの定義域である。

さて，$(S)_3$ は $u(t) = e^{-tA}a$ と一意に解け，この$u(t)$に対し，圧力 $p:]0,\infty[\longrightarrow M$ が一意に存在して，u，p が$(S)_2$ の解になることはよく知られている。(Ladyzhenskaya[11] または Temam [14])

§3 Stokes方程式の半離散近似

この§では次のことを仮定しよう。

$$(*) \quad D(A) = H^2(\Omega)^2 \cap V, \quad \|v\|_2 \leqq c_1 \|Av\|_0, \quad \|Av\|_0 \leqq c_2 \|v\|_2 \quad (\forall v \in V)$$

(c_1, c_2 は正の領域定数)

注意： Ωが2次元凸多角形領域の場合には，Kellogg－Osborn [10] によって，(＊)が成立することが証明されているが，3次元の場合はわかっていない。又，次元が何であれ，$\partial\Omega$が十分滑らかであるならば(＊)が成立することもわかっている。(Ladyzhenskaya [11] または Cattabriga [15])

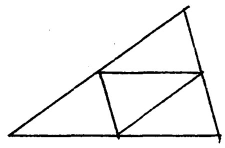
さて，$(S)_2$ の形で，空間変数 x について離散化することを考えよう。以下に出てくる有限要素空間は，Bercovier－Pironneau [1] によるものである。簡単のため次元は2としよう。

(三角形分割)

$\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$: a regular family of triangulations of Ω

$h>0$: mesh size

$\tilde{\mathcal{T}}_h$ は，$\mathcal{T}_h$ の各三角形を右図のように4等分して得られる三角形分割とする。



$\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ は，inverse condition (Ciarlet [2]) を満足するものと仮定し，さらに次の仮定をおく。

(＊＊) $\mathcal{T}_h$ の各三角形は少なくともひとつの頂点がΩの内部にある。

(近似に用いられる有限次元空間)

$$X_h = \{ v_h \in C(\overline{\Omega})^2 ;\ v_h|_K \text{ は各 } K \in \tilde{\mathcal{T}}_h \text{ について一次式。} v_h|_{\partial\Omega} = 0 \}$$

$$M_h = \{ q_h \in C(\overline{\Omega}) ;\ q_h|_K \text{ は各 } K \in \mathcal{T}_h \text{ について一次式。} \int_\Omega q_h = 0 \}$$

$$V_h = \{ v_h \in X_h ;\ (v_h, \nabla q_h) = 0 \quad \forall q_h \in M_h \}$$

注意； $X_h \subset X$, $M_h \subset M \cap H^1(\Omega)$ であるが，一般に $V_h \not\subset V$ である。

さて，$L^2(\Omega)^2$ から V_h への直交射影を Q_h とかくことにして，$(S)_2$ を次のように離散化する。

$$
(S)_2^h \begin{cases} \left(\dfrac{du_h}{dt}, v_h\right) + (\nabla u_h(t), \nabla v_h) - (\operatorname{div} v_h, p_h(t)) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (t>0, \quad v_h \in X_h) \\ u_h(t) \in V_h, \quad p_h(t) \in M_h \quad (t>0) \\ u_h(0) = Q_h a \end{cases}
$$

仮定 (**) のもとで $(S)_2^h$ が一意解をもつことが証明できる。(Bercovier - Pironneau [1] または Okamoto [12]) ここではこの事実を認めることにして先へ進もう。

離散化された Stokes 作用素 $A_h : V_h \longrightarrow V_h$ を，条件

$$
(A_h w_h, v_h) = (\nabla w_h, \nabla v_h) \qquad (w_h, v_h \in V_h)
$$

で定義すると，u_h は，

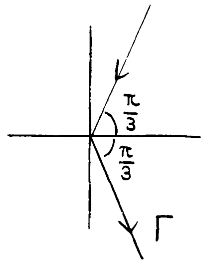
$$
(S)_3^h \begin{cases} \dfrac{du_h}{dt} + A_h u_h(t) = 0 \\ u_h(0) = Q_h a \end{cases}
$$

で特徴づけられる。従って問題は，$e^{-tA}a - e^{-tA_h}Q_h a$ を評価することになる。そこで，Fujita - Mizutani [6] に従って，

$$
(3.1) \quad e^{-tA}a - e^{-tA_h}Q_h a = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-tz}\left\{(z-A)^{-1} - (z-A_h)^{-1}Q_h\right\} a\, dz
$$

という表示式を考える。

ここにΓは右のような積分路である。



§4 誤差評価

次の定理が前半の主要結果である。

定理 1

(4.1) $$\left\| e^{-tA}a - e^{-tA_h}Q_h a \right\| \leqq \frac{ch\|a\|_0}{t} \quad (a \in H,\ 0<t<\infty)$$

(4.2) $$\left\| e^{-tA}a - e^{-tA_h}Q_h a \right\| \leqq \frac{ch^2\|a\|_0}{t} \quad (a \in H,\ 0<t<\infty)$$

ここに，c は領域だけに依存する定数である。

略証： 以後領域だけに依存する正定数を区別しないで c とかくことにする。

(3.1) をみれば，$z \in \Gamma$ に関して一様に，

(4.3) $$\left\| (z-A)^{-1}a - (z-A_h)^{-1}Q_h a \right\|_j \leqq ch^{2-j}\|a\|_0 \qquad j=0,1$$

が成り立つことを示せばよいことがわかる。実際，

$$\left\| e^{-tA}a - e^{-tA_h}Q_h a \right\|_j \leqq \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma |e^{-tz}| \left\| (z-A)^{-1}a - (z-A_h)^{-1}Q_h a \right\|_j |dz|$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma e^{-\frac{t|z|}{2}} c h^{2-j}\|a\|_0 |dz|$$

$$= \frac{\frac{2}{\pi}ch^{2-j}\|a\|_0}{t}$$

そこで，(4.3) の証明であるが，$z=0$ の場合は，Bercovier-Pironneau[1] が証明している。以下に示すように，一般

の z の場合にも証明はほとんど平行に行なわれる。

さて，$w=(z-A)^{-1}a$，$w_h=(z-A_h)^{-1}Q_h a$ とおこう。このとき，w, w_h は，$p\in M$，$p_h\in M_h$ が一意に存在して，

$$(4.4)\quad \begin{cases} z(w,v)-(\nabla w,\nabla v)-(v,\nabla p)=(a,v) & (v\in X) \\ w\in V \end{cases}$$

$$(4.5)\quad \begin{cases} z(w_h,v_h)-(\nabla w_h,\nabla v_h)-(v_h,\nabla p_h)=(a,v_h) & (v_h\in X_h) \\ w_h\in V_h \end{cases}$$

によって特徴づけられる。このとき，$j=1$ の場合の (4.3) を示すには，次の2つの補題を示せばよい。

補題 4.1

$$(4.6)\quad |z|^{\frac12}\|w-w_h\|_0+\|w-w_h\|_1$$
$$\leqq c\inf_{v_h\in V_h}\left\{|z|^{\frac12}\|w-v_h\|_0+\|w-v_h\|_1\right\}+c\inf_{q_h\in M_h}\|p-q_h\|_0$$

補題 4.2

$$(4.7)\quad \inf_{v_h\in V_h}\left\{|z|^{\frac12}\|w-v_h\|_0+\|w-v_h\|_1\right\}$$
$$\leqq c\inf_{y_h\in X_h}\left\{\left(|z|^{\frac12}+\frac1h\right)\|w-y_h\|_0+\|w-y_h\|_1\right\}$$

(4.6) と (4.7) を用いて (4.3) を導くのは容易である。実際，

$$\inf_{y_h\in X_h}\left\{\left(|z|^{\frac12}+\frac1h\right)\|w-y_h\|_0+\|w-y_h\|_1\right\}$$
$$\leqq ch|z|^{\frac12}\|w\|_1+ch^2\cdot\frac1h\|w\|_2+ch\|w\|_2$$

および，$\inf_{\varrho_h \in M_h} \|\rho - \varrho_h\|_0 \leqq ch\|\nabla\rho\|_0$

が容易にわかり，（Ciarlet [2]），これと Fujita-Mizutani [6] p.758 の技巧で証明される評価式，

$$\|w\|_1 \leqq C|z|^{-\frac{1}{2}}\|a\|, \quad \|w\|_2 \leqq C\|a\|_0, \quad \|\nabla\rho\| \leqq C\|a\|_0$$

によって，$j=1$ の場合の (4.3) を得る。

(4.6)，(4.7) の証明については，Okamoto [12] を参照していただきたい。また，$j=0$ の場合の (4.3) は，いわゆる Nitsche のトリックを用いて証明されるが，これについても Okamoto [12] で述べる予定である。 ▨

以上で，定理 1 の証明のあらすじを終わるが，定理 1 には様々な変形が可能である。たとえば，次のような定理が証明できる。

定理 2

$$(4.8)\quad \|e^{-tA}a - e^{-tA_h}Q_h a\|_j \leqq \frac{ch^{2-j}}{\sqrt{t}}\|a\|_1 \quad \left(\begin{array}{l} a \in V,\ 0<t<\infty \\ j=0,1 \end{array}\right)$$

$$(4.9)\quad \|e^{-tA}a - e^{-tA_h}Q_h a\|_j \leqq ch^{2-j}\|a\|_2 \quad \left(\begin{array}{l} a \in D(A)\ \ 0<t<\infty \\ j=0,1 \end{array}\right)$$

この定理を証明するには，Fujita-Mizutani の方法よりも Helfrich の方法の方が都合がよい。くわしい証明は，Fujita [4] と Okamoto [12], [13] をみていただきたい。

最後に，圧力に対する誤差評価については，次の定理をあげておく。

定理３

(4.10) $\quad \| p(t) - p_h(t) \|_0 \leq \frac{ch}{t^{\frac{3}{2}}} \| a \|_0 \qquad (0 < t < \infty,\ a \in H)$

注意； (＊) が成立しないときは，定理１〜３が成立しない。しかし，その場合でも，近似解の収束自体，すなわち，

$$\lim_{h \downarrow 0} \| e^{-tA} a - e^{-tA_h} Q_h a \|_1 = 0 \qquad (a \in H)$$

は，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $[\varepsilon, \infty[$ で一様に成立する。

§5 Navier-Stokes 方程式の場合

この§では，Ω は２次元の凸多角形領域とする。従って特に (＊) が成立する。

$L^2(\Omega)^2$ から H への直交射影を P とし，

$$Fw = P(w \cdot \nabla) w$$

とおくと，$(N.S.)_1$ は次のように定式化できる。

$$(N.S.)_2 \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au(t) + Fu(t) = 0 & (t > 0) \\ u(0) = a \end{cases}$$

今２次元流を考えているから，任意の $a \in H$ に対し $(N.S.)_2$ の解は $[0, \infty[$ で一意に存在することがわかっている。(Kato-

Fujita [9], Fujita [3])

$(N.S.)_2$ を空間変数について次のように離散化する。

$$(N.S.)_2^h \begin{cases} \dfrac{du_h}{dt} + A_h u_h(t) + F_h u_h(t) = 0 & (t>0) \\ u_h(0) = Q_h a \end{cases}$$

ここで，A_h, Q_h は§3のそれであり，$F_h u_h(t)$ は，

$$\begin{cases} (F_h u_h(t), v_h) = b(u_h(t) : u_h(t), v_h) & (v_h \in V_h) \\ F_h u_h(t) \in V_h \end{cases}$$

によって特徴づけられる。 b は，

$$b(\varphi : \psi, \chi) = \frac{1}{2}((\varphi\cdot\nabla)\psi, \chi) - \frac{1}{2}((\varphi\cdot\nabla)\chi, \psi)$$

で定義される3重線型形式である。

さて，次の補題は Ω の次元に関係なく成立する。

補題 5.1

$(N.S.)_2^h$ の解 u_h は $[0,\infty[$ で存在する。

誤差評価は次のようになる。

定理 4

α, β について単調増加な関数 $L(\alpha,\beta)$ が存在して，任意の $T>0$ に対して，次の評価が成立する。

$$(5.1)\quad \|u(t) - u_h(t)\|_j \leqq L(\|a\|_2, T) h^{2-j} \quad 0<t<T\,) \quad j=0,1$$

$$(5.2)\quad \|u(t) - u_h(t)\|_j \leqq \frac{L(\|a\|_1, T)}{\sqrt{t}} h^{2-j} \quad 0<t<T\,) \quad j=0,1$$

以下，$\|u(t) - u_h(t)\|_1$, $a \in D(A)$ の場合を例にとって証明

の概略を示そう。まず，Duhamel の原理によって，

$$u(t) = e^{-tA} a - \int_0^t e^{-(t-s)A} Fu(s)\,ds$$

$$u_h(t) = e^{-tA_h} Q_h a - \int_0^t e^{-(t-s)A_h} F_h u_h(s)\,ds$$

と書き直す。すると，

$$\begin{aligned}(5.3)\quad u(t) - u_h(t) = & \; e^{-tA} a - e^{-tA_h} Q_h a \\ & - \int_0^t \left\{ e^{-(t-s)A} - e^{-(t-s)A_h} Q_h \right\} \left\{ Fu(s) - Fu(t) \right\} ds \\ & - \int_0^t \left\{ e^{-(t-s)A} - e^{-(t-s)A_h} Q_h \right\} Fu(t)\,ds \\ & - \int_0^t e^{-(t-s)A_h} \left\{ Q_h Fu(s) - F_h u(s) \right\} ds \\ & - \int_0^t e^{-(t-s)A_h} \left\{ F_h u(s) - F_h u_h(s) \right\} ds \\ \equiv & \; I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t) + I_5(t)\end{aligned}$$

$a \in D(A)$ として，$I_j(t)$ を順番に評価してゆき，得られた結果をまとめておくと，次のようになる。

$$(5.4)\quad \| I_j(t) \|_1 \leqq L(\|a\|_2, T)\, h \qquad j = 1, 2, 3, 4 \quad 0 < t < T$$

$$(5.5)\quad \| I_5(t) \|_1 \leqq L(\|a\|_2, T) \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} \| u(s) - u_h(s) \|_1\, ds$$

従って，$\varphi(t) \equiv \| u(t) - u_h(t) \|_1$ とおくと，

$$(5.6)\quad \varphi(t) \leqq L(\|a\|_2, T) \left\{ h + \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} \varphi(s)\,ds \right\} \quad 0 < t < T$$

となる。このVolterra型積分不等式を解いて，次を得る。

(5.7) $\|u(t)-u_h(t)\|_1 = \varphi(t) \leqq L(\|a\|_2, T)h \quad (0<t<T)$

（Ω, $\|a\|_2$, T だけに依存する定数はみな一律に $L(\|a\|_2, T)$ とかいた。）

(5.4), (5.5)の証明はOkamoto[13]にゆずることにして，(5.6)から(5.7)を導こう。これは次の補題からわかる。

補題 5.2

$f:[0,T] \longrightarrow [0,\infty[$ は連続とし，$a>0$, $b>0$, $0<\alpha<1$ は定数とする。もし，

(5.8) $f(t) \leqq a + b\int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s)\,ds \qquad (0<t<T)$

が成立するならば，b, T だけに依存する定数 c が存在して，

(5.9) $f(t) \leqq ca \qquad (0<t<T)$

が成立する。

証明： $\mu \equiv \sup_{0\leqq t\leqq T} f(t)$ とおくと，(5.8)から，

(5.10) $f(t) \leqq a + b\mu\int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s)\,ds$

$= a + b\mu\, t^{1-\alpha} B(1-\alpha, 1) \qquad (0<t<T)$

ここで，$B(\ ,\ )$ はEulerのBeta関数である。

(5.10)を(5.8)の右辺にもち込んで，

(5.11) $f(t) \leqq a + b\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\{a + b\mu\, s^{1-\alpha} B(1-\alpha,1)\}\,ds$

$= a + ab\, t^{1-\alpha} B(1-\alpha,1) + b^2\mu\, t^{1-\alpha} B(1-\alpha,1)\, B(1-\alpha, 2-\alpha)$

この手続きを繰り返すと，任意の自然数 m に対し，

$$(5.12)\quad f(t) \leqq a\left\{1+\sum_{k=1}^{m-1}(bt^{1-\alpha})^k B(1-\alpha,1)B(1-\alpha,2-\alpha)\cdots B(1-\alpha,1+(k-1)(1-\alpha))\right\}$$
$$+\mu\,(bt^{1-\alpha})^m B(1-\alpha,1)B(1-\alpha,2-\alpha)\cdots B(1-\alpha,1+m(1-\alpha))$$

一方 $B(1-\alpha,1)B(1-\alpha,2-\alpha)\cdots B(1-\alpha,1+(m-1)(1-\alpha)) = \dfrac{\Gamma(1-\alpha)^m}{\Gamma(1+m(1-\alpha))}$

であるから，mを十分大きくとって

$$\frac{(bT^{1-\alpha})^m\Gamma(1-\alpha)^m}{\Gamma(1+m(1-\alpha))} < \frac{1}{2}$$

とすれば，

$$\frac{1}{2}\mu \leqq a\left\{1+\sum_{k=1}^{m}(bT^{1-\alpha})^k B(1-\alpha,1)\cdots B(1-\alpha,1+(k-1)(1-\alpha))\right\}$$

を得る。これが(5.9)に他ならない。 ▨

以上が2次元の場合に得られた結果であるが，3次元については，解が大域的に存在するかどうかわからないので話は格段とむつかしくなる。今までの所，次の定理だけが得られている。

定理5

ある$T_0>0$（$T_0=\infty$でもよい）があって，uが$[0,T_0[$で存在すると仮定する。このとき，$0<T_1<T_0$なる任意のT_1に対しΩ，$\|a\|_2$，T_1だけに依存する定数$L(\|a\|_2,T_1)$が存在して，

$$\|u(t)-u_h(t)\|_j \leqq L(\|a\|_2,T_1)h^{2-j} \qquad j=0,1 \quad 0\leqq t\leqq T_1$$

参 考 文 献

[1] M. Bercovier — O. Pironneau,
Error Estimate for Finite element Method Solution of the Stokes Problem in the primitive variables,
Numer. Math., 33, 1979, 211 – 224

[2] P. G. Ciarlet,
The Finite Element Method for Elliptic Problems.
North-Holland, Amsterdam, (1978)

[3] 藤田 宏
Navier-Stokes 方程式の初期値問題の解の一意存在
—作用素の分数巾の応用—
数学 (岩波書店), 第14巻, (1962), 65—81

[4] H. Fujita,
On the Semi-Discrete Finite Element Approximation for the Evolution Equation $u_t + A(t)u = 0$ of Parabolic Type, Topics in Numerical Analysis III, J. Miller (ed.), Academic press, 1977, 143–157

[5] H. Fujita — T. Kato
On the Navier–Stokes Initial Value Problem I,
Arch. Rational Mech. Anal., 16, 1964, 269 – 315

[6] H. Fujita – A. Mizutani
On the finite element method for parabolic equations, I; approximation of holomorphic semi-groups, Jour. Math. Soc. Japan 28, 1976, 749 – 771

[7] V. Girault – P. A. Raviart
Finite Element Approximation of Navier-Stokes Equations, Lecture note in Math. no. 749, Springer-Verlag (1979)

[8] R. Glowinski – O. Pironneau
On a ixed Finite Element Approximation of the Stokes Problem (I). Convergence of the Approximate Solutions, Numer. Math. 33 1979 397–424

[9] T. Kato – H. Fujita.
On the Nonstationary Navier-Stokes System, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 32 (1962) 243–260

[10] R.B. Kellogg – J.E. Osborn
A Regularity Result for the Stokes Problem in a Convex Polygon, Jour. Func. Anal., 21 1976, 397 – 431

[11] O.A. Ladyzhenskaya
The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, Gordon and Breach, New York, 1969

[12] H. Okamoto
On the Semi-Discrete Finite Element Approximation for the Nonstationary Stokes equations, to appear

[13] H. Okamoto
On the Semi-Discrete Finite Element Approximation for the Nonstationary Navier-Stokes equations.
to appear.

[14] R. Temam
Navier-Stokes Equations, North-Holland, Amsterdam, 1977,

[15] L. Cattabriga
Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 31, 1961, 308-340