数理解析研究所講究録
第 451 巻 1982 年 207-212

Fourier multiplier に関する de Leeuw の定理および Wiener Tauberian Theorem の証明を見直して

Univ. of New Mexico　　L.-s. HAHN

一変数の場合だけ考える.

A. まず Fourier multiplier の定義から始める. 簡単の為 $1\le p\le 2$ とする. $\hat{\mathbb{R}}$ 上の可測函数 φ が p-multiplier であるとは任意の $f\in L^p(\mathbb{R})$ に対し $\varphi(\xi)\cdot\hat{f}(\xi)=\hat{g}(\xi)$, $\xi\in\hat{\mathbb{R}}$, となる $g\in L^p(\mathbb{R})$ が存在することである.

この定義を言いかえれば次の補題1が得られる.

補題1　$1<p\le 2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. $\varphi\in L^\infty(\hat{\mathbb{R}})$ に対し, 次の二条件は同値である:

(a) φ は p-multiplier である. [即ち $\varphi\in M_p(\hat{\mathbb{R}})$],

(b) 不等式

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\hat{\mathbb{R}}}\varphi(\xi)\cdot\hat{f}(\xi)\cdot\hat{g}(\xi)\,d\xi\right|\le K\,\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}\cdot\|g\|_{L^q(\mathbb{R})}$$

がすべての $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して成り立つ様な定数 K が存在する.

$p=1$ の場合は簡単である:

<u>定理</u>2　$\varphi\in M_1(\hat{\mathbb{R}})$ となる必要十分条件は $\varphi=\hat{\mu}$ となる測度 $\mu\in M(\mathbb{R})$ が存在することである。即ち L^1-multipliers は Fourier-Stieltjes 変換に限る。

一方次の定理が成り立つ。

<u>定理</u>3 (Bochner)　$\hat{\mathbb{R}}$ 上の連続函数 φ に対して次の二条件は同値である。

(a)　φ は Fourier-Stieltjes 変換である; 即ち $\varphi=\hat{\mu}$ が成り立つ $\mu\in M(\mathbb{R})$ が存在する。

(b)　不等式

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j\varphi(\xi_j)\right| \leq K\left\|\sum_{j=1}^{n} a_j e^{i\xi_j x}\right\|_{sup}$$

が任意の $\{a_1,\cdots,a_n\}\subset\mathbb{C}$, $\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}\subset\hat{\mathbb{R}}$ に対して成り立つ様な定数 K が存在する。

又 $\hat{\mathbb{R}}$ 上の連続函数 φ に対して Bochner の定理の条件 (b) は次の条件 (b') と同値である。

(b')　不等式

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\hat{\mathbb{R}}}\hat{f}(\xi)\cdot\varphi(\xi)\,d\xi\right| \leq K\,\|f\|_{sup}$$

がすべての $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して成り立つ様な定数 K が存在する。

蛇足だが $\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\hat{\mathbb{R}}}\hat{f}(\xi)\cdot\varphi(\xi)\,d\xi\right| \leq K\,\|\hat{f}\|_{L^1(\hat{\mathbb{R}})}$, $\forall\ f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, は trivial である。($K=\|\varphi\|_{sup}$ とすればよい)。$\|\hat{f}\|_{L^1(\hat{\mathbb{R}})}$ をもっと小さい $\|f\|_{sup}$ でおき代える事によって (b') は φ を

Fourier-Stieltjes 変換たらしめる条件となるのである．

(b)$\Rightarrow$(b')　　(b) が $\{a_j\}_{j=-\infty}^{\infty} \in l^1(\mathbb{Z})$ に対して成り立つと仮定して (b') がすべての $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対して成り立つ事を示せばよい．十分大きな N に対して f_N を $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ の $2\pi N$-periodic extension とすれば $\hat{f}(\frac{n}{N}) = 2\pi N \hat{f}_N(\frac{n}{N})$ $(\forall n \in \mathbb{Z})$ だから Riemann 積分の定義から直ぐ出る．

(b')$\Rightarrow$(b)　　測度 $\mu(\xi) = \sum_{j=1}^{n} a_j \delta_{\xi_j}(\xi)$ を連続函数 $(\hat{K}_\varepsilon * \mu)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{j=1}^{n} a_j e^{-\frac{(\xi-\xi_j)^2}{2\varepsilon}}$ で「近似」すればよい．ここで $K(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$, $K_\varepsilon(x) = K(\sqrt{\varepsilon}x) = \frac{e^{-\frac{\varepsilon x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ である．

条件 (b') が成り立てば $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上の $\mathbb{C}$-線型写像 $f \longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_{\hat{\mathbb{R}}} \hat{f}(\xi)\cdot\varphi(\xi)\,d\xi$ は $C_0(\mathbb{R})$ 上の連続線型汎函数に拡張出来るから Riesz の表現定理によって $\mu \in M(\mathbb{R})$ の存在が言える．即ち (b')$\Rightarrow$(a)．逆は明らかである．

よって条件 (b') は (a)，即ち $\mathbb{R}$ 上の測度 μ の存在と同値である．同様に (b) が成り立てば三角多項式 $\sum_{j=1}^{n} a_j e^{i\xi_j x}$ の集合は $\mathbb{R}$ の Bohr コンパクト化 $\overline{\mathbb{R}}$ 上の連続函数空間（即ち $\mathbb{R}$ 上の概週期函数空間）で稠密であるから再び Riesz の表現定理によって $\overline{\mathbb{R}}$ 上の測度の存在と同値である．

若し φ が $\hat{\mathbb{R}}$ 上の連続函数であるならば此の四条件は全部同値である．

此の関係と定理2を見抜いて de Leeuw [2] は次の定理を証

明した.

定理4 (de Leeuw) $\hat{R}$上連続有界函数 φ に対し次の二条件は同値である.

(a) $\varphi \in M_p(\hat{R})$.

(b) 不等式

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \varphi(\xi_j) \right| \leqq K \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j e^{i\xi_j x} \right\|_{B_p} \cdot \left\| \sum_{j=1}^{n} b_j e^{i\xi_j x} \right\|_{B_q}$$

がすべての $\{a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n\} \subset \mathbb{C}$, $\{\xi_1, \cdots, \xi_n\} \subset \hat{R}$ に対して成り立つ様な定数 K が存在する. ここに $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ で

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j e^{i\xi_j x} \right\|_{B_p} = \lim_{T \to \infty} \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left| \sum_{j=1}^{n} a_j e^{i\xi_j x} \right|^p dx \right]^{1/p}$$

である. $\left\| \sum_{j=1}^{n} b_j e^{i\xi_j x} \right\|_{B_q}$ も同様.

[彼は φ が不連続な場合にも拡張してゐる.]

de Leeuw の証明は p-multiplier の定義を補題1に言い直して上記の討論 (b)$\Longleftrightarrow$(b') の trivial でない拡張を行なったもので「名人藝」と言える. 周知の様に超函数では Dirac 測度につき「驚嘆すべき玲瓏な」表現法がある. この技巧的な証明を見透しのよいエレガントな証明でおき代えられないだろうか? 又 Dirac 測度の translates の線型結合の Fourier-Stieltjes 変換は三角多項式でそれは又概週期函数に連がる. よって概週期函数の理論を複素函数論的な方法で再建設出来ないものだらうか?

B. 次に Wiener Tauberian Theorem を考える.

定理5 (Wiener) $\varphi\in L^\infty(\mathbb{R})$ とする.

(i) $$\lim_{x\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\cdot\varphi(y)\,dy = A\int_{\mathbb{R}} f(y)\,dy$$

がある $f\in L^1(\mathbb{R})$ について成り立つ.

(ii) $$\lim_{x\to\infty}\int_{\mathbb{R}} g(x-y)\cdot\varphi(y)\,dy = A\int_{\mathbb{R}} g(y)\,dy$$

がすべての $g\in L^1(\mathbb{R})$ について成り立つ.

(i)と(ii)が同値であるための必要十分条件は $\hat{f}(\xi)\neq 0,\ \xi\in\hat{\mathbb{R}}$, である.

この有名な定理の証明は Hahn-Banach の定理によって次の補題6に帰する.

補題6 $\varphi\in L^\infty(\mathbb{R})$, $f\in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}(\xi)\neq 0,\ \xi\in\hat{\mathbb{R}}$, の条件の下で $(f*\varphi)(x)=0$ がすべての $x\in\mathbb{R}$ に対して成り立てば $\varphi=0$ a.e. である.

この補題6の証明は「乱暴に」Fourier 変換をとればすぐ出来る: $\hat{f}(\xi)\cdot\hat{\varphi}(\xi)=0$ で $\hat{f}(\xi)\neq 0,\ \xi\in\hat{\mathbb{R}}$, だから $\hat{\varphi}(\xi)=0$, $\forall\ \xi\in\hat{\mathbb{R}}$. よって Fourier 変換の一意性により $\varphi=0$ a.e.

勿論 L^∞ 函数の Fourier 変換はそう簡単には行かない. しかし L^∞ 函数の Fourier 変換を正則函数の対によって定義すると言う idea を活かして上記の「証明」を救えないだらうか?
確かに T. Carleman [1] はこの idea に沿った証明を与えてゐる. 但し彼はその証明で Wiener(-Levy) の定理を使ってゐる. 若

し後者を使うのであれば T. Carleman の様にしなくても証明は二・三行ですむ。 Wiener-Levy の定理を使わず L^p 函数の Fourier 変換を正則函数の対で定義すると言う idea を用いた Wiener-Tauberian Theorem の直接な証明は存在しないだろうか？

文献

1. T. Carleman, L'integrale de Fourier et questions qui s'y rattachent Almquist and Wiksell, Uppsala 1944.
2. K. de Leeuw, On L^p Multipliers, Ann. Math. 81 (1965), 364-379.