数理解析研究所講究録
第452巻 1982年 75-92

点過程の複合待ち行列システムへの応用について

東京理科大 理工　宮沢政清

§1 はじめに

点過程を待ち行列システムへ応用する考えは、古くからあるが，ここ5,6年において，新たな発展がなされつつある。点過程理論は、待ち行列モデルを記述する上では、理論的に自然なものである。また、その数学的な利点は、独立性やマルコフ性の仮定を置かなくとも，定常性の仮定だけで，理論的展開ができる所にある。しかし，この点は弱点でもあって，モデルの記述は可能でも，解析的に有効な結果は、ほとんど得られない状態であった。これが，5,6年前から変り始めたのは、主に次の2つのことによる。1つは、待ち行列での、時間平均と客平均が、後述されるPalm測度の理論により明確にされ，それらの2つ平均の関係が、一般的式で表現された点である。また，他の1つは、リトルの公式"$L=\lambda W$"のような広く成り立つ式が、いろいろ見つかってきた点であ

る。この報告では、これらの関係式を不変式と呼ぶことにする。不変式は、マルコフ性などの仮定がなくとも成り立つことが多く、点過程の理論を使うと，それらを体系的に得ることができる。

この報告では、点過程の理論をもちいて，複数窓口系，タンデム型待ち行列など，より複雑な待ち行列モデル，これらを複合待ち行列と呼ぶ，について，不変式を導びくこと及びその応用について論じる。

点過程理論を使って不変式を得る方法には、大きく分けて2つの方法がある。1つは、逆変換公式と呼ばれるPalm測度に関する公式を利用する方法で、Franken (1976) や Miyazawa (1979)でもちいられた。他方は、遷移速度の保存則と呼ばれるもので，マルコフ過程における平衡方程式と同様な考えで導びき出されたものである。この方法は、König et al. (1978)が得たもので，その後、König and Schmidt (1980) や Miyazawa (1981)などでもちいられた。この報告では、後者の遷移速度の保存則を使う。ただし，その法則を、複合待ち行列システムへ応用しやすい形に変形してから用いる。

§2 点過程理論

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$を確率空間としよう。このとき，$\omega \in \Omega$ は、待

ち行列システムの時間的経過を表すとし，$\omega = \{\xi(t)\}_{t=-\infty}^{+\infty}$ と表現されるものとしよう。いま，各 $\omega \in \Omega$ に対して定義された点列 $\{t_i(\omega)\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ は，$\cdots t_{-1} \leq t_0 \leq 0 < t_1 \leq t_2 \leq \cdots$ かつ

$$\lim_{i \to -\infty} t_i = -\infty, \quad \lim_{i \to +\infty} t_i = +\infty$$

を満たしているとする。このとき，$\{t_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ は，点過程と呼ばれる。さて，$\{t_i(\omega)\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ に対し，

$$(2.1) \qquad \nu(B)(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \chi_{\{t_i(\omega) \in B\}}(\omega) \qquad (\forall B \in \mathcal{B}(R))$$

とおけば，νは，整数値測度である。ここに，χ_A は，集合Aの指示関数を表わし，$\mathcal{B}(R)$は，実軸上のボレル集合体を表すとする。$\{t_i\}$ を与えることと，νを与えることは同値である。点列 $\{t_i\}$ が重複点，すなわち，$t_i = t_j \ (i \neq j)$ となるものを含まないとき，この点列$\{t_i\}$と対応するνは，単純と呼ばれる。もし，$\{t_i\}$が，単純でなければ，重複点を，1点と数えて，番号の付け変えをすることにより単純な点列$\{t_i^*\}$を得ることができる。これを単純化と呼ぶ。$\{t_i^*\}$に対応する整数値測度をν^*で表す。

点過程 $\{t_i\}$ は，待ち行列モデルでは，たとえば，客の到着の時点を表す。しかし，待ち行列モデルでは，その他にも，各種の点列が考えられる。たとえば，タンデム型の場合には，

第1のシステムを出て第2のシステムに入る時点や，第2のシステムから退去する時点も考えられる。これらを数学的に表すためには，同時に複数個の点過程を考えると便利である。そこで，点過程 U_1, U_2 を考え，それらに対して，

$$(2,2)\qquad (U_1+U_2)(B) = U_1(B)+U_2(B) \qquad (\forall B\in\mathcal{B}(R))$$

とおくことによって，新たな点過程 U_1+U_2 を定義しておく。

また，時間のずらし T_Δ も定義しておこう。

$$(2,3)\qquad T_\Delta \xi(t) = \xi(t+\Delta) \qquad (\forall t\in R\text{：実数全体})$$

いま，$\omega=\{\xi(t)\}$ であるから，(2,3)より $T_\Delta\omega$ が定められる。次に，事象 $D\in\mathcal{F}$ に対して，

$$(2,4)\qquad T_\Delta D = \{\omega : T_\Delta\omega \in D\}$$

を定義しておこう。

これからは，任意の Δ に対し，

$$(2,5)\qquad P(T_\Delta D)=P(D) \qquad (\forall D\in\mathcal{F})$$

と仮定する。すなわち，P は，$\{T_\Delta\}$ について定常な確率測度である。このとき，$\{\xi(t)\}$ や，点過程，U_1, U_2 などは，同時に定常となる。次に，Palm 測度を定義しよう。

点過程Ụに対し，

$$(2.6)\quad P_U(D)=\nu^{-1}E\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}g(s)\chi_{\{T_{-s}D\}}U(ds)\right\}\quad(\forall D\in\mathcal{F})$$

により，$(\Omega,\mathcal{F})$上の確率測度P_Uを定義し，これを，Uに関する Palm測度と呼ぶ。ここに，$\nu=E\{U[0,1)\}$，$\int_{-\infty}^{+\infty}g(s)\,ds=1$ ($g(s)\geq 0\ \forall s$) とする。(2.6)式は，gの形に依存しないことが証明されている。

Palm測度P_Uは，標本平均と次のように関係づけられる。

$$(2.7)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi(t_i))=E_U\{f(\xi(0))\}\qquad a.s.\ P.$$

ここに，fは，非負な関数であるとする。また，Pは，エルゴード的とする。(2.7)より，待ち時間など，客ごとに定義される量に対しては，Palm測度が便利なことがわかる。

§3 遷移速度の保存則と一般公式

確率過程$\{\xi(t)\}$の状態空間をKとする。König et al.(1978)は，単純点過程Uと，Uに依存したKの部分集合族K_Uに対して，若干の仮定のもとに次の公式を得た。

$$[公式\ \mathrm{I}]\quad \mathfrak{A}_U(A)=\nu[P_U(\xi(0-)\in A)-P_U(\xi(0+)\in A)]$$
$$(\forall A\in K_U)$$

ここに，$\{\xi(t)\}$は，左右の極限をもつ確率過程であると仮定

する。また，

$$(3.1)\qquad \alpha_U(A)=\lim_{t\downarrow 0}\Big[\int_K P(\xi(t)\in A\,|\,\xi(0)=x,\ U[0,t)=0)\times P(\xi(0)\in dx) - P(\xi(0)\in A)\Big]$$

とする。

たとえば，$\{\xi(t)\}$を，単一窓口系G/G/1の仮り待ち時間過程としよう。このとき，$U[0,t)=0$，すなわち，$[0,t)$内に客が来なければ，

$$(3.2)\qquad \xi(t)=(\xi(0)-t)^+$$

であるから，$A=(u,+\infty)$とすると，$u>0$に対し，

$$(3.3)\qquad \begin{aligned} &P(\xi(t)>u\,|\,\xi(0)=x,\ U[0,t)=0)\\ &=P(\xi(0)-t>u\,|\,\xi(0)=x,\ U[0,t)=0)\\ &=\chi_{\{x>u+t\}} \end{aligned}$$

ここに，$a^+=\max(0,a)$とする。したがって，

$$(3.4)\qquad \begin{aligned} \alpha_U(A)&=\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\left[P(\xi(0)>u+t)-P(\xi(0)>u)\right]\\ &=\frac{d}{dt}P(\xi(0)>u+t)\Big|_{t=0} \end{aligned}$$

となることがわかる。

Miyazawa(1981)は，公式Iを，複数個の点過程の場合へ変

形し，次の式を得た。

$$[\text{公式 II}] \quad \alpha_U(A) = \sum_{i=1}^{n} \nu_i \left(P_{U_i}(\xi(0-) \in A) - P_{U_i}(\xi(0+) \in A) \right) \quad (\forall A \in K_U)$$

ここに，$U_1, U_2, \cdots, U_n$ は、単純点過程であり，

$$(3.5) \quad U^* = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$$

の関係が成り立つとする。また，$\nu_i = EU_i(0,1)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ とする。

次に、公式 II を、待ち行列モデルへ応用する際に，$\{\xi(t)\}$ として何を選ぶとよりかを考えておこう。一般の待ち行列の問題では，窓口に並んでいる人の数や，サービス中の人が窓口を去るまでの時間等の分布がわかれば十分であろう。たとえば，待ち時間は、この２つの量から計算できる。そこで，これからは，待ち人数を表す量 L 及び、サービス中の人が窓口を去るまでの時間を表す量 r を考える。ただし，L は、タンデム型のように窓口が多数ある場合も考慮して，一般にベクトル値を取るとする。L の状態空間を J で表す。J は離散型の空間であるとする。また，r は、点過程 $U = \{t_i\}$ に対し，

$$(3.6) \quad r(t) = \left(r(t_i+) - C_{L(t_i+)}(t - t_i) \right)^+ \quad (\forall t \in (t_i, t_{i+1}))$$

の関係を満たしているとする。ここに，c_j $(j \in J)$ は，K に依存する定数であるとする。

この場合に，公式Ⅱを適用すると，$\forall u > 0$ に対して，

[公式Ⅱ] $$c_j \cdot P(L=j,\ r>u) = \sum_{i=1}^{n} \nu_i \left(E_{U_i}\{(r^+ - u)^+ ;\ L^+ = j\} - E_{U_i}\{(r^- - u)^+ ;\ L^- = j\} \right) \quad (\forall j \in J)$$

が得られる。ここに，

$$L = L(0),\quad L^+ = L(0+),\quad L^- = L(0-)$$
$$r = r(0),\quad r^+ = r(0+),\quad r^- = r(0-)$$

とする。

複合待ち行列システムを考える上で基本単位となるものとして，複数窓口系とタンデム型待ち行列の2つを取りあげてみる。以下では，これら2つの系について不変式を求める。ただし，簡単のために，複数窓口系は，待ち合い室無限，タンデム型に対しては，単一窓口2段で，各窓口の待ち合い室は無限とする。また，両方のシステムとも，客は，定常点過程で到着すると仮定する。このとき，これらのシステムをそれぞれ，G/G/s 及び G/G/1 → G/1 で表すことにする。

§4 G/G/s の不変式

次の記号をもちいる。

N_0 … 到着時点よりなる点過程（$\lambda = E\{N_0(0,1]\}$ とする。）

N_1 … サービス完了時点よりなる点過程

P_0 … N_0 についての Palm 測度，P_0 に関する期待値は、E_0 で表す。

P_1 … N_1 についての Palm 測度，P_1 に関する期待値は、E_1 で表す。

$l(t)$ … 時刻 t での系内人数（サービ中も含む）。

$\alpha(t)$ … 時刻 t で次の客が到着するまでの時間，なお、客の到着間隔は、T で表す。

$\gamma_i(t)$ … 時刻 t で i 番目の窓口でサービス中の客の残りサービス時間，なお，客のサービス時間は、S で表す（$i = 1, 2, \cdots, s$）。

$\gamma(t) = \gamma_1(t) + \cdots + \gamma_s(t)$

公式 III で，$U_1 = N_0$，$U_2 = N_1$，$U = U_1 + U_2$，$L(t) = l(t)$，$r(t) = 0$（定数），$\alpha(t)$，or $\gamma(t)$ とおけば，次の 3 組の式が得られる。

$$(4.1) \qquad P_0(l^- = j) = P_1(l^+ = j) \qquad (j = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$(4.2) \qquad P_0(l = j) = \lambda \{E_0(T ; l^- = j-1) + E_1(\alpha^+ ; l^+ = j) - E_1(\alpha^- ; l^+ = j-1)\} \quad (j = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$(4.3)\qquad \min(s,j)\,P(l=j)$$
$$=\lambda\{E_0(\gamma^+;\,l^-=j-1)-E_0(\gamma^-;\,l^-=j)$$
$$+E_1(\gamma^+;\,l^+=j)-E_1(\gamma^-;\,l^+=j)\}$$
$$(j=1,2,3,\cdots\cdots)$$

ここに，$l^\pm=l(0\pm)$，$\alpha^\pm=\alpha(0\pm)$，$\gamma^\pm=\gamma(0\pm)$ 等の略号をもちいた。また，$E_0(\tau;\,l^-=j-1)$ 等は、条件 $\{l^-=j-1\}$ を満すωの集合上での期待値を表す。

(4.3)式は、窓口が空いているときに，客が等確率で窓口を選ぶとすると，次の式へ変形できる（König and Schmidt (1980) を参照）。

$1\leqq j\leqq s-1$ を満す j に対して，

$$(4.4)\qquad jP(l=j)=\lambda\{[E_0(S_1\,|\,l^-=j-1)+(j-1)E_0(\gamma_1^-\,|\,\gamma_1^->0,\,l^-=j-1)]$$
$$\times P_0(l^-=j-1)$$
$$-\,jE_0(\gamma_1^-\,|\,\gamma_1^->0,\,l^-=j)P_0(l^-=j)$$
$$+\,jE_1(\gamma_1^+\,|\,\gamma_1^+>0,\,l^+=j)P_1(l^+=j)$$
$$-\,(j-1)E_1(\gamma_1^+\,|\,\gamma_1^->0,\,l^+=j-1)P_1(l^+=j-1)\}$$

$j=s$ に対して，

$$(4.5)\qquad jP(l=j)=\lambda\{[E_0(S_1\,|\,l^-=j-1)+(j-1)E_0(\gamma_1^-\,|\,\gamma_1^->0,\,l^-=j-1)]P_0(l^-=j-1)$$
$$-\,jE_0(\gamma_1^-\,|\,\gamma_1^->0,\,l^-=j)P_0(l^-=j)+[E_1(S\,|\,l^+=j)+(j-1)\times$$
$$E_1(\gamma_1^+\,|\,\gamma_1^->0,\,l^+=j]P_1(l^+=j)-(j-1)E_1(\gamma_1^-\,|\,\gamma_1^->0,\,l^-=j-1)P_1(l^\pm=j-1)\}$$

$j \geqq s+1$ を満すjに対して，

$$(4.6)\quad sP(l=j) = \lambda\{sE_0(\gamma_1^+ \mid \gamma_1^- > 0,\ l^- = j-1)P_0(l^- = j-1)$$
$$- sE_0(\gamma_1^- \mid \gamma_1^- > 0,\ l^- = j)P_0(l^- = j)$$
$$+ [E_1(S \mid l^+ = j) + (s-1)E_1(\gamma_1^+ \mid \gamma_1^- > 0,\ l^+ = j)]P_1(l^+ = j)$$
$$- (s-1)E_1(\gamma_1^- \mid \gamma_1^- > 0,\ l^+ = j-1)P_1(l^+ = j-1)\}$$

(4.6) を $j, j+1, \cdots$ について加えると，$j \geqq s+1$ なるjに対して，

$$(4.7)\quad sP(l \geqq j) = \lambda\{E_1(S_1 \mid l^+ \geqq j)P_1(l^+ \geqq j)$$
$$+ sE_0(\gamma_1^- \mid \gamma_1^- > 0,\ l^- = j-1)P_0(l^- = j-1)$$
$$+ (s-1)E_1(\gamma_1^+ \mid \gamma_1^+ > 0,\ l^+ = j-1)P_1(l^+ = j-1)\}$$

が得られる。

§5 G/G/1 → G/1 の不変式

次の記号をもちいる。

N_0 --- 第1の窓口への客の到着時点からなる点過程 ($\lambda = EN_0(0,1]$)。

N_1 ---- 第1の窓口でサービスを終了し，第2の窓口へ並ぶ時点からなる点過程。

N_2 --- 第2の窓口でサービスを完了する時点からなる点

過程。

$P_i = P_{N_i}$ $(i=0,1,2)$

$l_i(t)$ --- i 番目の窓口でサービス中の客も含めた待ち人数 $(i=1,2)$。

$r_i(t)$ ---- i 番目の窓口でサービス中の客の残りサービス時間，なお，サービス時間は S_i とする $(i=1,2)$。

$r_0(t)$ ---- 第1の窓口への次の到着までの時間，到着間隔は、T で表す。

$l(t) = l_1(t) + l_2(t)$ ；系内総人数

このとき，$L(t) = (l_1(t), l_2(t))$ とし，$r(t) = 0$（定数），$r_0(t)$，$r_1(t)$，または，$r_2(t)$ とすれば，次の4組の式が得られる。

$$
(5.1) \quad P_0(l_1^+=i, l_2^+=j) + P_1(l_1^+=i, l_2^+=j) + P_2(l_1^+=i, l_2^+=j)
$$
$$
= P_0(l_1^+=i+1, l_2^+=j) + P_1(l_1^-=i-1, l_2^+=j+1) + P_2(l_1^+=i, l_2^+=j-1)
$$
$$
(i, j \geqq 0)
$$

$$
(5.2) \quad P(l_1=i, l_2=j) = \lambda\{E_0(T; l_1^+=i, l_2^+=j)
$$
$$
+E_1(r_0 : l_1^+=i, l_2^+=j) - E_1(r_0; l_1^+=i-1, l_2^+=j+1)
$$
$$
+E_2(r_0; l_1^+=i, l_2^+=j) - E_2(r_0; l_1^+=i, l_2^+=j-1)\}
$$
$$
(i, j \geqq 0)
$$

(5.3) $$P(l_1=i,\ l_2=j)$$
$$=\lambda\{E_0(r_1^+;\ l_1^+=i,\ l_2^+=j)-E_0(r_1^-;\ l_1^+=i+1,\ l_2^+=j)$$
$$+E_1(S_1;\ l_1^+=i,\ l_2^+=j)$$
$$+E_2(r_1^+;\ l_1^+=i,\ l_2^+=j)-E_2(r_1^-;\ l_1^+=i,\ l_2^+=j-1)\}$$
$$(i\geqq 1,\quad j\geqq 0)$$

(5.4) $$P(l_1=i,\ l_2=j)$$
$$=\lambda\{E_0(r_2^+;\ l_1^+=i,\ l_2^+=j)-E_0(r_2^-;\ l_1^+=i+1,\ l_2^+=j)$$
$$+E_1(r_2^+;\ l_1^+=i,\ l_2^+=j)-E_1(r_2^-;\ l_1^+=i-1,\ l_2^+=j+1)$$
$$+E_2(S_2;\ l_1^+=i,\ l_2^+=j)\}$$
$$(i\geqq 0,\quad j\geqq 1)$$

§ 6 不変式の応用

(I) M/GI/s の近似式

M/GI/s 型待ち行列の平均待ち人数（サービス中の客を含まない）について近似式を求める。これらについては、Hokstad (1978) や，Nozaki and Ross (1978) 等で，求められているが，ここでは、彼らより仮定をゆるめて考える。

(仮定1) $\forall j\geqq 1$ に対して，

(6.1) $$E_0(r_1^-\mid r_1^->0,\ l_1^-=j)\doteqdot E_1(r_1^-\mid r_1^->0,\ l^+=j)$$

（仮定 2）　$1 \leqq {}^{\forall} j \leqq s-1$ に対して，

(6.2)　$E_0((\gamma_1^- + \cdots + \gamma_s^-)^2 \mid l^- = j)$

$$\cong E_1((\gamma_1^- + \cdots + \gamma_s^-)^2 \mid l^+ = j)$$

これらの仮定のもとで，§4 の結果を使って計算すると，

$$(6.3) \qquad E\{(l-s)^+\} \cong \frac{\lambda^2 E(S^2)}{2(s-1)!\,(s-\rho)^2} \times \frac{\rho^{s-1}}{\sum_{j=0}^{s-1} \frac{\rho^j}{j!} + \frac{\rho^s}{(s-\rho)(s-1)!}}$$

が得られる。これは，Hokstad や Nozaki and Ross の結果に一致している。

（II）　GI/GI/s の近似式．

GI/GI/s 型待ち行列とは，到着間隔が互いに独立で同一分布にしたがい，またサービス時間も互いに独立で同一分布にしたがい，さらに，それら 2 つの量も，また，互いに独立であるモデルである。このとき，${}^{\forall} j \geqq 0$ に対し，

（仮定 3）

$$(6.4) \qquad E_0(\alpha \mid l^- = j) \cong \frac{E(T^2)}{2E(T)}$$

$$(6.5) \qquad E_1(\alpha \mid l^+ = j) \cong \frac{E(T^2)}{2E(T)}$$

および，

（仮定 1′）　$^{\forall} j \geqq 1$ に対し，

$$(6.6)\qquad E_0(r_1^- \mid r_1^- > 0,\ l^- = j) \cong \frac{E(S^2)}{2E(S)}$$

$$(6.7)\qquad E_1(r_1^- \mid r_1^- > 0,\ l^+ = j) \cong \frac{E(S^2)}{2E(S)}$$

を仮定すると，（I）の場合と同様にして次の近似式が得られる。

$$(6.8)\qquad E(l - \Delta)^+ \cong \frac{\rho(\delta_S^2 + \delta_T^2)}{2(\Delta - \rho)} \times P_0(l^- \geqq \Delta)$$

ここに，$\delta_S^2 = \dfrac{E(S^2)}{(E(S))^2}$，$\delta_T^2 = \dfrac{E(T^2)}{(E(T))^2}$，であり，

$$(6.9)\qquad P_0(l^- \geqq \Delta) \cong \frac{2\rho - \Delta(1 - \delta_T^2)}{2(\Delta - \rho)}$$

$$\times \frac{1}{\displaystyle\sum_{j=0}^{\Delta-1} \frac{(\Delta-1)!\,(\delta_T^2+1)^{j-\Delta+1}}{j!\,[2\rho + (\delta_T^2+1)(j+1)] \times \cdots \times [2\rho + (\delta_T^2+1)(\Delta-1)]} + \frac{2\rho - \Delta(1-\delta_T^2)}{2(\Delta-\rho)} \times \frac{\frac{1}{\Delta}(1+\delta_T^2)}{2\rho + (\delta_T^2 - 1)(\Delta-1)}}$$

とする。ただし，(6.9) が，意味をもつのは，その値が正の数にならなければならないので，

$$(6.10)\qquad \frac{\rho}{\Delta} > \frac{1}{2}(1 - \delta_T^2)$$

の場合である。(6.8) と (6.9) で与えられる，この近似式については，数値的検証は，まだ行なっていない。

(Ⅲ) G/G/1 → G/1 の不等式.

以下の3つの場合について考える。

① 到着間隔が互いに独立で，Tが NBUE (NWUE) 分布にしたがうとき，すなわち，

$$(6.11)\quad E(T-x)^{+} \underset{(\geqq)}{\leqq} E(T)\cdot P(T>x) \qquad (\forall x \geqq 0)$$

であるとき，$\forall i, k \geqq 0$ に対して，

$$(6.12)\quad P(l_1 \geqq i, l \geqq k) \underset{(\leqq)}{\geqq} P_0(l_1^{+} \geqq i+1, l^{+} \geqq k)$$

が成り立つ。

② 第2の窓口のサービス時間が互いに独立で，S_2 が，NBUE (NWUE) 分布にしたがうとき，$\forall k \geqq 0, \forall j \geqq 1$ に対して，

$$(6.13)\quad P(l \geqq k, l_2 \geqq j) \underset{(\geqq)}{\leqq} \rho_2 P_2(l^{+} \geqq k, l_2^{+} \geqq j-1)$$

ここに，$\rho_2 = \lambda E(S_2)$ とする。

③ 第1の窓口のサービス時間が互いに独立で，S_1 が，NBUE (NWUE) 分布にしたがうとき，$\forall j \geqq 0$ に対して，

$$(6.14)\quad P(l_1 \geqq 1, l_2 \geqq j) \underset{(\leqq)}{\geqq} \rho_1 P_1(l_2^{+} \geqq j+1)$$

が成り立つ。ここに，$\rho_1 = \lambda E S_1$ とする。なお，(6.14) 式は次のように変形することもできる。

$$(6.15) \quad P(\ell_2 \geq j \mid \ell_1 \geq 1) \geq P_1(\ell_2^+ \geq j+1)$$

§7 結語

本論でもちいた方法を使えば，一般的なネットワーク型待ち行列に対しても，不変式を得ることができる。今後の問題は，これらの不変式から，どのようにすれば，応用上有益な結果を導びくことができるかという点であろう。少くとも，§6で得たように，近似式や不等式を考える際には，これらの不変式が役立つものと思う。

(参考文献)

[1] Franken,P.(1976) Einige Anwendungen der Theorie zufälliger Punktprozesse in der Bedienungstheorie 1. Math. Nachr. 70, 303-319.

[2] Hokstad,P.(1978) Approximation for the M/G/m queue. Opns. Res. 26, 510-523.

[3] König,D., Rolski,T., Schmidt,V., and Stoyan,D.(1978) Stochastic processes with imbedded marked point process (PMP) and their applications in queueing. Math. Oprationsforsch. Statist. 9, 125-141.

[4] König,D. and Schmidt,V.(1980) Stochastic inequalities between customer-stationary and time-stationary characteristics of queueing systems with point processes. J. Appl. Prob. 17, 768-777.

[5] Little,J.D.C.(1961) A proof for the queueing formula: L= W. Opns. Res. 9, 383-387.

[6] Mecke,J.(1967) Stationäre zufällige Masse auf lokalkompakten Abelschen Gruppen. Z. Wahrscheinlich. 9, 36-58.

[7] Miyazawa(1979) A formal approach to queueing processes in the steady state and their applications. J. Appl. Prob. 16, 332-346.

[8] Miyazawa(1981) Note on Palm measure in the intensity conservation law and inversion formula in PMP and their applications. Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Optimization 12, 281-293.

[9] 森村英典・宮沢政清「複雑な待ち行列システムへ点過程理論をもちいる方法とその応用について」電々公社電気通信研究所研究成果報告(1981年9月)

[10] Mori,M.(1980) Relations between queue-size and waiting-time distributions. J. Appl. Prob. 17, 822-830.

[11] Nozaki.S.A. and Ross,S.M.(1978) Approximations in finite capacity multi-server queues with Poisson arrivals. J. Appl. Prob. 15, 826-834.