数理解析研究所講究録
第454巻 1982年 2-22

距離有界定理，有限表現定理とスターハイト　1

豊橋技術科学大学　　橋口攻三郎

はじめに

本稿において，次の4つの結果について述べる．

(1) 距離関数をもつ有限オートマトンが距離有界であるか否かを決定するアルゴリズムが存在する；

(2) 正規言語 R と正規言語の有限族 $\mathcal{C}$ に対して，R が $\mathcal{C}$ の上に有限表現をもつか否かを決定するアルゴリズムが存在する；

(3) 正規言語 R に対して次の(i)〜(iii)を満たす正規表現 E が存在する：(i) E は R を表わす，(ii) E のスターハイトと R のスターハイトは等しい，(iii) E のスターハイト0の任意の部分表現 E_0 に対して，

$$\ell(E_0) \leqq (\#\Sigma)^{18n^4(h(R)\cdot 5n^2+2)}$$

が成立する，ここで $\ell(E_0)$ は E_0 の長さを表わし，$A=\langle \Sigma, Q, M, \{0\}, F\rangle$ は R を受理する既約オートマトン，Σ は有限ア

ルファベット，$\#\Sigma$はΣの元の個数，Qは状態の集合，nはQの元の個数，$h(R)$はRのスターハイトである；

(4) 正規言語のスターハイトが1か否かを決定するアルゴリズムが存在する．

本稿において，(1)と(2)の証明の概略を述べる．(3)は別論文〔5〕において証明された．(4)は(2)と(3)の系として与えられる．

有限アルファベットΣに対して，Σ^*はΣの上のすべての語の集合を表わす．Σ^+は長さ1以上の語の集合を表わす．λは空語を表わす．ϕは空集合を表わす．語$w \in \Sigma^*$に対して$\ell(w)$はwの長さを表わす．有限集合Qに対して，$\#Q$はQの元の個数を表わす．

1．距離関数をもつ有限オートマトン

はじめに距離関数をもつ有限オートマトンの定義を与える．

定義1.1．距離関数をもつ有限オートマトン（略してD－オートマトン）$\mathcal{A}$は6つ組，$\langle \Sigma, Q, M, S, F, d \rangle$で与えられる，ここで$\Sigma$は有限入力アルファベット，$Q$状態の有限集合，$M: Q \times \Sigma \to 2^Q$推移関数，$S, F \subseteq Q$初期状態と最終状態の集合，$d: Q \times \Sigma \times Q \to \{0, 1, 2, \cdots\} \cup \{\infty\}$距離関数で$d$は次の条件を満たす：任意の$(q, a, q') \in Q \times \Sigma \times Q$に対し，もし$q' \in M(q, a)$ならば$d(q, a, q') \in \{0, 1\}$であ

り，$q' \notin M(q,a)$ ならば $d(q,a,q')=\infty$．ここで ∞ は無限大を示す．

M は通常の方法で $2^Q \times \Sigma^*$，$2^Q \times 2^{\Sigma^*}$ へ拡張される（注意 任意の $q \in Q$ に対して $M(q,\lambda)=\{q\}$）．$R(A)$ は A によって受理される語の集合を示す，すなわち $R(A)=\{w \in \Sigma^* \mid M(s,w) \cap F \neq \phi\}$．$d$ は $Q \times \Sigma^* \times Q$ と $2^Q \times \Sigma^* \times 2^Q$ へ次のように拡張される：(1) 任意の $q, q' \in Q$，$w \in \Sigma^*$ と $a \in \Sigma$ に対して，(1.1) $d(q,\lambda,q)=0$，(1.2) $q' \notin M(q,w)$ ならば $d(q,w,q')=\infty$，(1.3) $q' \in M(q,wa)$ ならば，$d(q, wa, q') = \min\{d(q,w,q'')+d(q'',a,q') \mid q'' \in M(q,w)$ かつ $q' \in M(q'',a)\}$；(2) 任意の $t, t' \subseteq Q$ と $w \in \Sigma^*$ に対して $d(t,w,t')=\min\{d(q,w,q') \mid q \in t, q' \in t'\}$．

定義 1.2．D－オートマトン $A=\langle \Sigma, Q, M, s, F, d \rangle$ に対して，次の (1)〜(3) を定義する：

(1) $D(A)=\sup\{d(s,w,F) \mid w \in R(A)\}$；

(2) $D(A)<\infty$ のとき A は距離有界であるといわれる；

(3) M_0 は $2^Q \times \Sigma^*$ から 2^Q への関数で，$t \subseteq Q$ と $w \in \Sigma^*$ に対して，$M_0(t,w)=\{q' \in Q \mid d(t,w,q')=0\}$．

定義 1.3　すべての $q \in Q$ と $a \in \Sigma$ に対して，$\# M_0(q,a) \leq 1$ が成立するとき，A は 0－決定性であるといわれる．

補題 1.1．任意の D－オートマトン $A=\langle \Sigma, Q, M, s, F, d \rangle$

が与えられたとき，次の(1)〜(5)を満たすD－オートマトン $A' = \langle \Sigma, Q', M', S', F', d' \rangle$ を構成できる：

(1) $\#S' = 1$；

(2) A'は0－決定性である；

(3) $R(A') = R(A)$；

(4) 任意の $w \in R(A)$ に対して，$d(S, w, F) = d(S', w, F')$；

(5) $D(A') = D(A)$；

(6) A'は距離有界である ⇔ Aは距離有界である．

以下において $A = \langle \Sigma, Q, M, S, F, d \rangle$ を任意のD－オートマトンとする．Aが距離有界であるか否かを決定するためのアルゴリズムを求めよう．補題1.1よりAは0－決定性であり，かつ $\#S = 1$ と仮定してよい．$S = \{s\}$ とする．

定義1.4．ある $x, y, z \in \Sigma^*$ に対して，$xyz \in R$ かつ $t = M(s, x)$ のとき，(t, y)をAに関する仕事という．$W(A)$ はAに関するすべての仕事の集合を表わす．

注意．すべての $w \in R(A)$ に対して，$(s, w) \in W(A)$ である．我々は $d(s, w, F)$ のある上界を求めたい．これを帰納的に行なうために，wを分解して，Aに関する仕事 (t, y) のすべてを考える．

定義1.5　任意の $\delta = (t, w) \in W(A)$ に対して，つぎの(1)〜(5)を定義する：

(1) $z(\delta) = \{q \in t \mid M_0(q, w) \neq \phi\}$;

(2) $\beta(\delta) = \{t' \subseteq Q \mid$ ある $x, y \in \Sigma^*$ に対して, $w = xy$ かつ $t' = M(t, x) - M_0(z(\delta), x)\}$;

(3) $I(\delta) = \# Q - \# M_0(z(\delta), w)$;

(4) $P(\delta) = \{(q, q') \mid q \in t$ かつ $q' \in M(q, w)\}$;

(5) $e(\delta) = \{w' \in \Sigma^* \mid$ 任意の $q \in t$ に対して, $M_0(q, w') = M_0(q, w)$ かつ $M(q, w') = M(q, w)\}$.

定義1.6. M^{-1} は $\Sigma^* \times 2^Q$ から 2^Q への写像で, 任意の $w \in \Sigma^*$ と $t \subseteq Q$ に対して $M^{-}(w, t) = \{q \in Q \mid M(q, w) \cap t \neq \phi\}$.

補題1.2. 任意の $\delta = (t, w) \in W(A)$ に対して,

(1) $0 \leqq I(\delta) \leqq \# Q$;

(2) 任意の $(q, q') \in t \times M(t, w) - P(\delta)$ に対して $d(q, w, q') = \infty$;

(3) 任意の $w' \in e(\delta)$ に対して, $I(\delta) = I(t, w')$.

任意の $w \in R(A)$ に対して, $d(S, w, F)$ の上界を求めるために, 上で定義した $I(\delta)$ に関する帰納法を用いる.

補題1.3. $\delta \in W(A)$ に対して, もし $I(\delta) = \min\{I(\delta') \mid \delta' \in W(A)\}$ ならば, $\beta(\delta) = \{\phi\}$ である.

証明. $\delta = (t, w)$ とする. $I(\delta) = \min\{I(\delta') \mid \delta' \in W(A)\}$ かつ $\beta(\delta) \neq \{\phi\}$ が成立すると仮定する. ある $x, y \in \Sigma^*$ に対して, $w = xy$ かつ $M(t, x) - M_0(z(\delta), x) \neq \phi$ が成立する

. $\delta' = (M(t,x), \lambda)$ とおく．このとき $\delta' \in W(A)$, $z(\delta) = M(t,x)$ かつ $I(\delta') = \#Q - \#M_0(z(\delta'), \lambda) = \#Q - \#M(t,x) < \#Q - \#M_0(z(\delta), x) \leq \#Q - \#M_0(z(\delta), w) = I(\delta)$.
すなわち $I(\delta') < I(\delta)$ であり矛盾．（証明終）

次の補題は $I(\delta)$ に関する帰納法においてベースの役割をはたす．

補題1.4. $\beta(\delta) = \{\phi\}$ を満たす $\delta = (t,w) \in W(A)$ と $(q, q') \in p(\delta)$ に対し，$d(q,w,q') \leqq \#t - 1$.

証明 $\delta = (t,w)$ として $\beta(\delta) = \{\phi\}$ とする．ある $(q,q') \in p(\delta)$ に対して $d(q,w,q') \geqq \#t$ が成立すると仮定する．ある $x_1, x_2, \cdots, x_{m+1} \in \Sigma^+$ と $q_1, q_2, \cdots, q_m \in Q$ が存在して，$d(q,w,q') = m+1 \geqq \#t$, $w = x_1 x_2 \cdots x_{m+1}$, $d(q, x_1, q_1) = d(q_1, x_2, q_2) = \cdots = d(q_m, x_{m+1}, q') = 1$ が成立する．各 $i = 0, 1, \cdots, m+1$ に対して，$q(i)$ を次のように定義する：$q(0) = q$，そして $i = 1, \cdots, m+1$ に対しては，$q(i) \in t$ は $M_0(q(i), x_1 x_2 \cdots x_i) = q_i$ をみたす．$m+1 \geqq \#t$ であるからある i, j $(0 \leq i < j \leq m+1)$ に対して，$q(i) = q(j)$ が成立する．このとき A が0-決定性なので，$d(q_i, x_{i+1} \cdots x_j, q_j) = 0$ である．すると $d(q, w, q') < m+1$ となって矛盾（証明終）

補題1.5 A が距離有界ならば，$t = M(t,w)$ である $\delta =$

$(t, w) \in W(A)$ に対して $z(\delta) \neq \phi$ である.

証明. A が距離有界であり, $\delta = (t, w) \in W(A)$, $t = M(t, w)$ かつ $z(\delta) = \phi$ であると仮定する. 任意の $(q, q') \in P(\delta)$ に対して, $d(q, w, q') > 0$ であり, かつある $x, y \in \Sigma^*$ に対して $t = M(0, x)$ かつ $xwy \in R$ が成立する. $k = D(A) + 1$ とおき, $w' = xw^k y$ とおく. このとき $w' \in R(A)$ かつ $d(0, w', F) \geq k > D(A)$, これは矛盾. (証明終)

定義 1.7. $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$ に対して, $o(i)$ を次のように帰納的に定義する, ここで $n = \# Q$ である:

(1) $o(0) = n - 1$;

(2) $i > 0$ ならば $o(i) = (o(i-1) + n + 1)(n+1)^{n+1} \cdot 2^{6n^2+1}$

補題 1.6. $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$ に対して

$$o(i) \leq n((n+1)^{3n} \cdot 2^{6n^2+1})^i.$$

2. 距離有界定理

距離有界定理 D-オートマトン $A = \langle \Sigma, Q, M, \{0\}, F, d \rangle$ が距離有界であるための必要十分条件は,

$$D(A) \leq o(n) = n((n+1)^{3n} \cdot 2^{6n^2+1})^n$$

が成立することである, ここで A は 0-決定性であり $n = \# Q$.

この定理は次のアルゴリズム I を与える.

定義 2.1. A を定理の D-オートマトンとする. $q, q' \in Q$ に対して, $R_0(q, q') = \{w \in \Sigma^* \mid d(q, w, q') = 0\}$ とおく.

$L(A)$を次のように定義する：

$L(A)=\{w\in R_1 \mid$ ある $q\in F$ に対して $R_1=R_0(s,q)\}$ $\cup\{w\in R_1\cdot\{a_1\}\cdot R_2\cdot\{a_2\}\cdots\{a_m\}\cdot R_{m+1} \mid (1)\ m\leq O(n)$, (2) $a_i\in\Sigma\ (i=1,\cdots,m)$, (3) ある $q_{j1}, q_{j2}\in Q\ (j=1,\cdots,m+1)$ に対して，$q_{11}=s$, $q_{m+1,2}\in F$, $R_j=R_0(q_{j1},q_{j2})\ (j=1,\cdots,m+1)$，かつ (4) $i=1,\cdots,m$ に対して $d(q_{i2},a_i,q_{i+1,1})=1\}$.

注意．Aが与えられたとき，我々は$L(A)$を求めて，$R(A)=L(A)$かるか決定できる．すなわち次のアルゴリズムを得る．

アルゴリズム1．Aを定理のD－オートマトンとする．このときAが距離有界であるための必要十分条件は，$R(A)=L(A)$が成立することである．

距離有界定理を証明するために，次の主補題を必要とする．

主補題．もしAが距離有界ならば，任意の$\delta=(t,w)\in W(A)$と整数$k>O(n)$に対してある$w'\in e(\delta)$と$P\leq P(\delta)$が存在して次の(1)～(3)が成立する：

(1) $z(t,w')=z(\delta)$；

(2) 任意の$(q,q')\in P$に対して，$d(q,w,q')$, $d(q,w',q')\leq O(I(\delta))$；

(3) 任意の$(q,q')\in P(\delta)-P$に対して

$d(q,w',q')\geq k$.

主補題を使って，定理を次のように証明できる．条件の十分性は明らかである．必要性．Aが距離有界であり，そしてkを$k > D(A)$かつ$k > o(n)$を満たす整数とする．任意の$w \in R(A)$を考える．$\delta = (s, w) \in W(A)$であり，主補題によってある$w' \in e(\delta)$と$P \subseteq p(\delta)$が存在して，主補題の(1)〜(3)が成立する．$w' \in R(A)$かつ$k > D(A)$であるから，ある$(q, q') \in P$に対して$q = s$, $q' \in F$, $d(q, w, q')$, $d(q, w', q') \le o(I(\delta)) \le o(n)$．故に$D(A) \le o(n)$であり定理が成立する．

以下の二の節において，主補題の証明の概略を述べる．証明は$\tau \in \{I(\delta) \mid \delta \in W(A)\}$に関する帰納法による．

定義2.2．任意の$w \in \Sigma^*$に対して，$Pre(w)$はwのプレフィックスの集合，すなわち$Pre(w) = \{x \in \Sigma^* \mid$ ある$y \in \Sigma^*$に対して$w = xy\}$．$Suf(w)$はwのサフィックスの集合，すなわち$Suf(w) = \{y \in \Sigma^* \mid$ ある$x \in \Sigma^*$に対して$w = xy\}$.

定義2.3．$\delta = (t, w) \in W(A)$とする．任意の$x, z \in \Sigma^*$と$y_1, \cdots, y_\ell \in \Sigma^+$に対して，$xy_1y_2 \cdots y_\ell \in Pre(w)$, $\ell = 4(\# Q)^2$かつ次の(1)〜(5)が成立するとき，δは$(x, y_1, \cdots, y_\ell, z)$において複雑であるといわれる：

(1) 任意の$q \in t$に対して，$M_0(q, x) = M_0(q, xy_1) = \cdots = M_0(q, xy_1 \cdots y_\ell)$，かつ$M(q, x) = M(q, xy_1) = \cdots = M(q, xy_1 \cdots y_\ell)$；

(2) 任意の $q \in M(t, xz)$ に対して，$M^-(z, q) = M^-(y_l z, q) = \cdots = M^-(y_1 \cdots y_l z, q)$；

(3) $\# M_0(z(\delta), w) = \# M_0(z(\delta), x)$；

(4) $M(t, x) - M_0(z(\delta), x) \neq \phi$；

(5) 任意の $q, q' \in M(t, x) - M_0(z(\delta), x)$ と $i = 1, \cdots, l$ に対して，$d(q, y_i, q') > 0$．

δ はある $x, z \in \Sigma^*$ と $y_1, \cdots, y_l \in \Sigma^+$ に対して，$(x, y_1, \cdots, y_l, z)$ において複雑であるとき，複雑であるといわれる．δ はどのような $x, z \in \Sigma^*$ と $y_1, \cdots, y_l \in \Sigma^+$ に対しても複雑でないとき，複雑でないといわれる．

補題2.1. $\delta = (t, w) \in W(A)$, $v_0, x, y_1, \cdots, y_l, z, v_1 \in \Sigma^*$, $v_0 x y_1 \cdots y_l z v_1 \in Pre(w)$, そして $l = 4(\# Q)^{\# Q}$ とする．$\delta' = (M(t, v_0), x y_1 \cdots y_l z v_1)$ とする．もし $I(\delta') = I(\delta)$ かつ δ' が $(x, y_1, \cdots, y_l, z)$ で複雑ならば，δ は $(v_0 x, y_1, \cdots, y_l, z)$ で複雑である．

定義2.4. 任意の $\delta = (t, w) \in W(A)$ に対して，$V_0(\delta)$ と $V(\delta)$ を次のように定義する：

(1) $V_0(\delta) = \{(M_0(q_1, x), M(q_1, x), M_0(q_2, x), M(q_2, x), \cdots, M_0(q_l, x), M(q_l, x), M^-(y, q_1'), M^-(y, q_2'), \cdots, M^-(y, q_m')) \mid x, y \in \Sigma^*,\ w = xy,\ t = \{q_1, \cdots, q_l\}$ かつ $M(t, w) = \{q_1', \cdots, q_m'\}\}$；

(2) $V(\delta) = \{(M(q_1, x), M(q_2, x), \cdots, M(q_\ell, x), M^-(y, q_1'), \cdots, M^-(y, q_m')) \mid x, y \in \Sigma^*, w = xy, t = \{q_1, \cdots, q_\ell\}$, かつ $M(t, w) = \{q_1', \cdots, q_m'\}\}$.

補題2.2. 任意の $\delta \in W(A)$ に対して，次の(1), (2)が成立する，ここで $n = \# Q$：

(1) $\# V_0(\delta) \leq (n+1)^n 4^{n^2}$；

(2) $\# V(\delta) \leq 4n^2$.

主補題の $i \in \{I(\delta) \mid \delta \in W(A)\}$ に関する帰納法による証明の概略を述べよう． $\delta = (t, w) \in W(A)$ とする．

ベース． $I(\delta) = \min\{I(\delta') \mid \delta' \in W(A)\}$ とする．補題1.3によって $\beta(\delta) = \{\phi\}$ である．ここで $w' = w$, $p = p(\delta)$ とおく．補題1.4より，主補題の主張が成立することは明らかである．

帰納的段階． $I(\delta) > \min\{I(\delta') \mid \delta' \in W(A)\}$ とする．4つの場合を考える．以下において $n = \# Q$ とする．

場合(1) $\beta(\delta) = \{\phi\}$．このとき主張はベースの場合と同様にして成立する．

場合(2) $\beta(\delta) \neq \{\phi\}$ かつ $z(\delta) = \phi$． このとき $I(\delta) = n$ であり，$w \neq \lambda$ である．ある $t_1, \cdots, t_\ell \subset Q$, $2 \leq \ell \leq 2^n - 1$, $x_i \in \Sigma^*$ $(i = 1, \cdots, \ell)$ と $a_j \in \Sigma$ $(j = 1, \cdots, \ell-1)$ が存在して，$t_1 = t$, $w = x_1 a_1 \cdots a_{\ell-1} x_\ell$, $t_i = M(t_i, x_i)$ $(i = 1, \cdots, \ell)$ かつ t_{j+1}

$= M(t_j, a_j)$ ($j=1,\cdots,\ell-1$) が成立する．$i=1,\cdots,\ell$ に対して，$\delta_i = (t_i, x_i)$ とおく．$\delta_i \in W(A)$ であり，補題1.5より $z(\delta_i) \neq \phi$．従って $I(\delta_i) < I(\delta) = n$．帰納法の仮定によってある $w_i \in \Sigma^*$ と $P \subseteq p(\delta_i)$ が存在して，主補題の(1)〜(3)が成立する．$w' = w_1' a_1 w_2' a_2 \cdots a_{\ell-1} w_\ell'$，かつ $P = \{(q, q') \in p(\delta) \mid$ ある $(q_{i1}, q_{i2}) \in P_i$ ($i=1,\cdots,\ell$) に対して (i) $q_{11}=q$，(ii) $q_{\ell 2} = q'$ として (iii) $q_{j+1\,1} \in M(q_{j2}, a_j)$ ($j=1,\cdots,\ell-1$)$\}$ とおく．このとき $P \subset p(\delta)$，$w' \in e(\delta)$ として $z(t,w') = z(\delta)$ である．さらに次の(i)，(ii)が成立する：

(i) 任意の $(q,q') \in p(\delta) - P$ に対して $d(q, w', q') \geq k$;

(ii) 任意の $(q,q') \in P$ に対して，$d(q,w,q')$，$d(q,w',q')$ $\leq (c(n-1)+1)\ell \leq (c(n-1)+1)(2^n-1) \leq c(n)$．

場合(3) $\beta(\delta) \neq \{\phi\}$，$z(\delta) \neq \phi$ かつ δ は複雑でない．

$\beta(\delta) \neq \{\phi\}$ であるから $w \neq \lambda$．次の(3.1)，(3.2)が成立するような w の分解，$w = x_1 x_2 \cdots x_\ell$ を考える：

(3.1) $x_i \in \Sigma^+$ ($i=1,\cdots,\ell$);

(3.2) $i=1,\cdots,\ell$ に対して，$M(t, x_1\cdots x_i) - M_0(z(\delta), x_1\cdots x_i) \neq \phi$ かつ任意の $x_i' \in Pre(x_i) - \{\lambda, x_i\}$ に対して，$M(t, x_1\cdots x_{i-1}x_i') = M_0(z(\delta), x_1\cdots x_{i-1}x_i')$．

次に，次の(3.3)，(3.4)を満たす w の分解，$w = y_1 v_1 y_2 v_2$

$\cdots y_m v_m$, を考える.

(3.3) m 個の整数 $1 = i_1 < i_2 < \cdots < i_m < \ell$ が存在して, $j = 1, \cdots, m$ に対して, $y_j = x_{i_j} x_{i_j+1} \cdots x_{i_{j+1}-2}$, そして $v_j = x_{i_{j+1}-1}$, ここで $v_m = x_\ell$;

(3.4) $i = 1, \cdots, m$ に対して, $I(\tau_i) < I(\delta)$, $j = 1, \cdots, m-1$ に対して $I(\delta_j) = I(\delta)$, そして $I(\delta_m) \le I(\delta)$, ここで $\tau_1 = (t, y_1)$, $\delta_1 = (t, y_1 v_1)$, $\tau_i = (M(t, y_1 v_1 \cdots y_{i-1} v_{i-1}), y_i)$ かつ $i = 2, \cdots, m$ に対して $\delta_i = (M(t, y_1 v_1 \cdots y_{i-1} v_{i-1}), y_i v_i)$.

帰納法の仮定と補題1.4 によって, 任意の $i = 1, \cdots, m$ に対して, ある $w_i' \in e(\delta_i)$ と $P_i \subset p(\delta)$ が存在して, 主補題の(1)〜(3)が成立し, かつ次の事が成立することがわかる: 任意の $(q, q') \in P_i$ に対して, $d(q, y_i v_i, q')$, $d(q, w_i', q') \le o(I(\delta)-1) + n + 1$. δは複雑でないので $m \le 4n^2(\# V_0(\delta))) \le (n+1)^n \cdot 2^{4n^2}$.

場合(2)と同様にして, ある $w' \in e(\delta)$ と $P \subset p(\delta)$ が存在して主補題の(1)〜(3)と次の事が成立することがわかる: 任意の $(q, q') \in P$ に対して, $d(q, w, q')$, $d(q, w', q') \le (o(I(\delta)-1) + n + 1) \cdot m \le (o(I(\delta)-1) + n + 1)(n+1)^n \cdot 2^{4n^2} \le o(I(\delta))$.

場合(4) $\beta(\delta) \ne \{\phi\}$, $z(\delta) \ne \phi$, かつδは複雑である.

$x y_1 \cdots y_\ell z \in \Sigma^+$ を, $x, z \in \Sigma^*$, $\ell = 4n^2$, $y_i \in \Sigma^+ (i = 1, \cdots, \ell)$, $x y_1 \cdots y_\ell z \in Pre(w)$, かつ$\delta$が $(x, y_1, \cdots, y_\ell, z)$ で複雑で

であるような，最小の長さの語とする．$\delta_{10}=(t,x)$，$\delta_{11}=(M(t,x),y_1)$，$\delta_{1i}=(M(t,xy_1\cdots y_{i-1}),y_i)$ $(i=2,\cdots,\ell)$，として $\delta_{1\ell+1}=(M(t,xy_1\cdots y_\ell),z)$ とおく．このとき $I(\delta_{1i})<I(\delta)$ または $I(\delta_{1i})=I(\delta)$ かつ δ_{1i} は複雑でないかのいずれかが成立する $(i=0,1,\cdots,\ell+1)$．帰納法の仮定と場合 (1)〜(3) によって，ある $w'_{1i}\in e(\delta_{1i})$ と $P_{1i}\subseteq p(\delta_{1i})$ が存在して，主張の (1)〜(3) が成立し，また次の事が成立する： 任意の $(q,q')\in P_{1i}$ に対して，$d(q,w'_{1i},q')$，$d(q,w'_{1i},q')\le(c(I(\delta)-1)+n+1)(n+1)^n 2^{4n^2}$，ここで $w_{10}=x$，$w_{1i}=y_i$ $(i=1,\cdots,\ell)$ として $w_{1\ell+1}=z$．

$t'=M(t,xy_1\cdots y_\ell z)$ とおく．t,t' と w'_{1i} $(i=0,1,\cdots,\ell+1)$ より，二つの関数 $P^+: t\times\{0,1,\cdots,\ell\}\to 2^Q$ と $P^-:\{1,\cdots,\ell+1\}\times t'\to 2^Q$ を次のように定義する：

(4.1) 任意の $q\in t$ と $i\in\{0,1,\cdots,\ell\}$ に対して，$P^+(q,i)=\{q'\in Q\mid d(q,w'_{10}w'_{11}\cdots w'_{1i},q')<k\}$；

(4.2) 任意の $q'\in t'$ と $i\in\{1,\cdots,\ell+1\}$ に対して，$P^-(i,q')=\{q\in Q\mid d(q,w'_{1i}w'_{1i+1}\cdots w'_{1\ell+1},q')<k\}$.

$\ell=4n^2\ge\#V(\delta)$ なので，ある $i,j\in\{0,1,\cdots,\ell\}$ が存在して $(i<j)$，任意の $q\in t$ と $q'\in t'$ に対して，$P^-(q,i)=P^+(q,j)$，かつ $P^-(i,t')=P^-(j,t')$ が成立する．$w_1'=w'_{10}w'_{11}\cdots w'_{1i}(w'_{1i+1}\cdots w'_{1j})^k w'_{1j+1}\cdots w'_{1\ell+1}$ とおく．ここで

$d(q, w_1', q') < k$ であるような $(q, q') \in t \times t'$ を考える. 定義より任意の $q_0, q_1 \in M(t, x) - M_0(2(\delta), x)$ に対して，$d(q_0, y_\mu, q_1) > 0$ $(\mu = 1, \cdots, l)$ であり，これから $d(q_0, w'_{1\mu}, q_1) > 0$ $(\mu = 1, \cdots, l)$. A は 0-決定性なので，これから任意の $(q_0, q_1) \in M(t, x) - M_0(2(\delta), x)$ に対して，$d(q_0, w'_{1i+1} \cdots w'_{1j}, q_1) > 0$. これらの事より，$d(q, w_1', q') < k$ ならばある $q_{01} \in M_0(2(\delta), x)$ に対して

$d(q, w_1', q') \le d(q, w'_{10} w'_{11} \cdots w'_{1i}, q_{01}) + d(q_{01}, w'_{1j+1} \cdots w'_{1l+1}, q') \le (0(I(\delta)-1)+n+1) \cdot 2^{6n^2}(n+1)^n$

が成立する. w_1' の構成から，$d(q, x y_1 \cdots y_l z, q') \le (0(I(\delta)-1)+n+1) 2^{6n^2}(n+1)^n$ も成立する.

さて $w = x y_1 \cdots y_l z w_2$ とし，$\delta_1 = (M(t, xz), w_2)$ とおく. δ_1 が複雑であれば上と同様な手続きを適用する. これを続けて，w の分解 $w = w_1 w_2 \cdots w_\mu w_0$ を得る. ここで $w_1 = x y_1 \cdots y_l z$，等は. この事と上の事より，w の分解 $w = v_1 v_2 \cdots v_{\mu+1}$，と $q_{0i} \in M_0(2(\delta), v_1 v_2 \cdots v_i)$ $(i = 1, \cdots, \mu)$ と $v_j' \in \Sigma^*$ $(j = 1, \cdots, \mu+1)$ が存在して，$d(q, v_1' \cdots v'_{\mu+1}, q') < k$ を満たす任意の $(q, q') \in P(\delta)$ に対して，次の (4.3) ～ (4.5) が成立する：

(4.3) $q_{0i+1} \in M(q_{0i}, v_{i+1}) \cap M(q_{0i}, v'_{i+1})$ $(i = 0, \cdots, \mu+1)$，ここで $q_{00} = q$ かつ $q_{0\mu+1} = q'$；

(4.4) $v_1'v_2'\cdots v_{\mu+1}' \in e(\delta)$;

(4.5) $d(q, v_1v_2\cdots v_{\mu+1}, q'),\ d(q, v_1'v_2'\cdots v_{\mu+1}', q')$
$\le n\cdot 2\cdot (o(I(\delta)-1)+n+1)(n+1)^n\cdot 2^{6n^2} \le o(I(\delta))$.

そこで $w' = v_1'v_2'\cdots v_{\mu+1}'$ かつ $p = \{(q,q')\in p(\delta) \mid d(q,w',q') < h\}$ とおけば，主張の(1)〜(3)が成立する．

これで主補題の略証を終える．

3．有限表現定理

この節を通して，Rを正規言語，$\mathcal{C}$を正規言語の有限族とする．$\mathcal{C}=\{R_i\subseteq\Sigma^* \mid i=1,\cdots,m\}$とする．$A=\langle\Sigma,Q,M,\{q_0\},F\rangle$を$R$を受理する既約オートマトン，$A_i=\langle\Sigma,Q_i,M_i,\{q_{0i}\},F_i\rangle$を$R_i$を受理する既約オートマトンとする．

定義3.1. $\mathcal{C}^*(\cdot,\cup)$は次の(1)〜(3)を満たす正規言語の最小の族である：(1) $\{\lambda\}\in\mathcal{C}^*(\cdot,\cup)$，(2) $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{C}^*(\cdot,\cup)$，そして(3) $\mathcal{C}^*(\cdot,\cup)$はコンカテネーション$(\cdot)$とユニオン$(\cup)$の演算に関して閉じている．

例3.1. $\mathcal{C}=\{\{a\}\mid a\in\Sigma\}$ならば，$\mathcal{C}^*(\cdot,\cup)=\{F\subseteq\Sigma^* \mid F$は有限集合$\}$である．

定義3.2. $R\in\mathcal{C}^*(\cdot,\cup)$が成立するとき，$R$は$\mathcal{C}$の上に有限表現を持つといわれる．

以下において，Rが$\mathcal{C}$の上に有限表現を持つか否かを決定するアルゴリズムについて述べる．この問題をDーオートマ

トンの距離有界性の問題に帰着させる.

注意. ある正規言語 R_0 に対して, $\mathcal{C}=\{R_0\}$, $R=R_0^*$ のとき, $R\in\mathcal{C}$ であるか否かを決定する問題が可解であるか否かを問う問題を J.A. Brzozowski は 1967 年に提起した. この問題は Limitedness problem と呼ばれ, 1978 年に I. Simon と筆者によって, 独立に肯定的に解かれた [6, 7].

R と $\mathcal{C}$ より次の D-オートマトン β を定義する.

定義 3.3. $\Delta=\{b_i \mid 1\leqq i\leqq m\}$ は新らしい有限アルファベットであり, $\Delta\cap\Sigma=\phi$ である. $W\in\Delta^+$ に対して, $\|W\|$ は言語 $R_{i_1}\cdot R_{i_2}\cdots R_{i_p}\subseteq\Sigma^*$ を表わす, ここで $W=b_{i_1}b_{i_2}\cdots b_{i_p}$ であり $i_j\in\{1,\cdots,m\}$ $(j=1,\cdots,p)$. Λ は Δ の上の空語であり, $\|\Lambda\|=\{\lambda\}\subseteq\Sigma^*$. $Z\subseteq\Delta^*$ に対して, $\|Z\|=\{w\in\|W\| \mid W\in Z\}$.

定義 3.4. $\beta=\langle\Sigma, P, M^+, S, \{f\}, d\rangle$ は次の (1) ~ (4) を満たす D-オートマトンである:

(1) $P=\{f\}\cup\{(t,g) \mid$ ある $W\in\Delta^*$ に対して, $t=M(\rho, \|W\|)$, そして $g\in Q_1\cup\cdots\cup Q_m\}$, ここで f は新らしい記号で $f\notin 2^Q\times(Q_1\cup\cdots\cup Q_m)$;

(2) $\lambda\notin R$ のとき $S=\{(\{\rho\}, \rho_i) \mid i=1,\cdots,m\}$, $\lambda\in R$ のとき $S=\{f\}\cup\{(\{\rho\}, \rho_i) \mid i=1,\cdots,m\}$;

(3) 任意の $(t,g)\in P$ $(g\in Q_i,\ 1\leqq i\leqq m)$ と $a\in\Sigma$ に対し

て，次の(a)〜(d) が成立する：

(a) $M_i(q,a)=\phi$ ならば $M^+((t,q),a)=\phi$；

(b) $M_i(q,a)\neq\phi$ かつ $M_i(q,a)\notin F_i$ ならば，$M^+((t,q),a)=\{(t,M_i(q,a))\}$，そして $d((t,q),a,(t,M_i(q,a)))=0$；

(c) $M_i(q,a)\in F_i$ かつ $M(t,R_i)-F\neq\phi$ ならば，$M^+((t,q),a)=\{(M(t,R_i),s_j)\mid j=1,\cdots,m\}\cup\{(t,M_i(q,a))\}$，$d((t,q),a,(M(t,R_i),s_j))=1$ $(j=1,\cdots,m)$，かつ $d((t,q),a,(t,M_i(q,a)))=0$；

(d) $M_i(q,a)\in F_i$ かつ $M(t,R_i)\subset F$ ならば，$M^+((t,q),a)=\{f\}\cup\{(t,M_i(q,a))\}\cup\{(M(t,R_i),s_j)\mid j=1,\cdots,m\}$，$d((t,q),a,(t,M_i(q,a)))=0$，そして $d((t,q),a,f)=d((t,q),a,(M(t,R_i),s_j))=1$ $(j=1,\cdots,m)$.

(4) 任意の $a\in\Sigma$ に対して，$M^+(f,a)=\phi$.

補題 3.1. $R(\beta)\subset R$.

定理 3.1. R が $\mathcal{C}$ の上に有限表現をもつための必要十分条件は，$R=R(\beta)$ でありかつ β が距離有界であることである．

証明. R が $\mathcal{C}$ の上に有限表現をもつと仮定する．ある $W_i\in\Delta^*$ $(i=1,\cdots,l)$ に対して，$R=\|W_1\|\cup\cdots\cup\|W_l\|$. この事から $D(\beta)\leq\max\{l(W_i)\mid i=1,\cdots,l\}$. よって β は距離有界である．又補題 3.1 と上の事から $R(\beta)=R$. 逆に $R(\beta)=R$ かつ β が距離有界であるとする．任意の $w\in R$ に対して，ある $W\in\Delta^*$ が存在して，$\|W\|\subseteq R$，$l(W)\leq D(\beta)$ かつ $w\in$

$\|W\|$. $D(\beta) < \infty$ であるから，ある $W_i \in \Delta^*$ $(i=1,\ldots,l)$ に対して $R = \|W_1\| \cup \cdots \cup \|W_l\|$. よって R は C の上に有限表現をもつ.

$R = R(\beta)$ と B の距離有界性を決定できるので，定理3.1は R が C の上に有限表現を持つか否かを決定するアルゴリズムを与える.

つぎの定理は距離有界定理と定理3.1より明らかである.

有限表現定理. R が C の上に有限表現を持つための必要十分条件は，長さ k 以下のある $w_1, w_2, \ldots, w_l \in \Delta^*$ が存在して，$R = \|W_1\| \cup \cdots \cup \|W_l\|$ が成立することである，ここで $k = \mu(\mu+1)^{3\mu^2} \cdot 2^{\mu(6\mu^2+1)}$，$\mu = 2^n$，そして $n = 2^{\#Q}(\#Q_1 + \cdots + \#Q_m)$.

4. スターハイト1の正規言語

定義4.1. 正規言語 E に対して，$d_0(E)$ は E のスターハイト0の部分表現の最大の長さを表わす.

定理4.1. 正規言語 R に対して，ある正規表現 E が存在して，次の(1)～(3)が成立する：(1) E は R を表わす，(2) E のスターハイトと R のスターハイトは等しい，(3) $d_0(E) \le \#\Sigma^{18(n^2+3)^6 h(R)}$，ここで $A = \langle \Sigma, Q, M, S, F \rangle$ は R を受理する既約オートマトンで $n = \#Q$.

定義4.2. R を正規言語，$A = \langle \Sigma, Q, M, S, F \rangle$ を R を受

理する既約オートマトンとする．またEをRを表わす正規表現とする． $o(R)=18(n^2+3)^6 h(E)$ とおく．ここで $n=\#Q$, $h(E)$ はEのスターハイトである． $\mathcal{C}_R$ を次のように定義する： $\mathcal{C}_R=\{\{w\} \mid w \in \Sigma^*, \ell(w) \leqq o(R)\} \cup \{(w_1 \cup \cdots \cup w_p)^* \mid w_i \in \Sigma^*, \ell(w_i) \leq o(R)\ (i=1,\cdots,p)\}$.

次の定理は定理4.1より明らかである．

定理4.2. 正規言語Rのスターハイトが1であるための必要十分条件はRが $\mathcal{C}_R$ の上に有限表現をもつことである．

この定理と定理3.1によって，正規言語のスターハイトが1か否か決定可能である．

文　献

1. L.C. Eggan, Transition graphs and the star height of regular events, Michigan Math. J. 10(1963) 385-397.

2. R.S. Cohen, Star height of certain families of regular events, J. Comput. System Sci 4(1970) 281-297.

3. K. Hashiguchi and N. Honda, The star height of reset-free events and strictly locally testable events, Information and Control 40(1979) 267-284.

4. K. Hashiguchi, Representation theorems on regular events, 投稿中.

5. K. Hashiguchi, Regular expressions with length-

bounded subexpressions of star height zero, 投稿中

6. I. Simon, Limited subsets of a free monoid, Proc. 19th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, 1978, 143-150.

7. K. Hashiguchi, A decision procedure for the order of regular events, Theoretical Computer Science 8 (1979) 69-72.