数理解析研究所講究録
第455巻 1982年 94-107

3値論理関数への節展開法の適用

関西大・電子工学科
今西 茂
村中徳明

Applications of Clause Selection Method to Ternary Logical Functions

Shigeru IMANISHI and Noriaki MURANAKA
(Faculty of Engineering, Kansai University)

In this paper, we present a useful method for prime implicant generation of ternary logical functions. The prime implicant generation using the clause selection method, which is effectively used in the binary system, is extended to our ternary one. This applications for the canonical expressions in the product of sum using the coincidence functions are elucidated. As a result, 2-type prime implicants and 1-type ones are separately obtained. Therefore, we propose improvements, in which generalized prime implicants are generated uniformly.

あらまし

2値論理関数の最小化を行う際に，すべての主項を効率よく生成するための木探索を用いるSlagleら[2]の方法が知られている。又，これを基礎にして新たに開発された主項生成のための節展開法が上林ら[12]により提案されている。この手法の特長は，主項を生成するために探索する木の冗長度を大幅に減少することができる点にある。

3値論理関数の簡単化を行う際にも，主項生成の効率化を図ることが重要な課題と考えられる。

このため本稿では，上記の節展開法を発展させて3値論理関数の主項生成に適用している。まず，3値論理関数を一致関数により和積標準形で表現する。ついで，この標準形を構成する論理和項に含まれている文字による節の集合を節点とし，木探索を実施すると，主項が2型項と1型項に分離されて生成される。従って，更に三根らの多値コンセンサス法を適用し，3値論理関数の主項を求めることになるので，必ずしも十分でない。このために，節の集合を構成する論理和項に含まれる文字の表現に改良を加えて，木探索を実行する改善法を提案することによって，3値論理関数の主項が統一して生成されることを示す。

1. まえがき

3値論理関数の論理設計において重要なことは，完全系をなす基本演算子を決めること，関数の展開及びその簡単化などが挙げられる。従って，まず使用する基本演算子を定義して，これに対する標準展開式を与え，この論理関数を簡単化するという手法がとられている。[(3)~(11)]

一方，2値論理関数の簡単化においては，（1）与えられた関数のすべての主項を求める。（2）最小カバーの問題に還元して関数の最小表現を与える主項の組合せを求める，に分けることができる。ここで，（2）のステップは正論理関数のコスト最小の主項を求める問題となるので，結局主項を求める有効な方法が論理関数の簡単化の本質的な部分であると言われている。[(12)]

このことは，3値論理関数の簡単化を行うに際しても同様と考えられ，実現する3値論理系に関係なく，上記（1）に相当する主項を求める操作を行って後に，（2）のステップにおいて所望の論理系に合った基本演算子と結びついた最小表現，あるいはその論理系を実現する上で有用な表現となる主項の組合せ選択を行えばよい，と考えられる。

本論文では，このような考えに基づき，2値論理関数の主項生成に有用である節展開法が提案されているので，[(12)] この

方法を拡張して3値論理関数の主項生成に適用している。

まず，3値論理関数を一致関数を用いて和積標準形で表現する．ついで，この標準形を構成する論理和項に含まれている文字による節の集合を節点として木探索を実施すると，主項が2型項と1型項とに分離されて生成される。従って，更に三根らの多値コンセンサス法を適用し，(4) 3値論理関数の主項を求めることになるので，必ずしも十分であるとは言えない。

このために，節の集合を構成する論理和項に含まれる文字の表現に改良を加えて，木探索を実行する改善法を提案することにより，3値論理関数の主項が統一して生成されることを明らかにしている。

2. 節展開法の適用(13)

3値n変数論理関数 $f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ の乗法標準形は表1の一致関数の $I_k(x)$ 関数を用いて次式のように表

表1 $I_k(x)$

x	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$I_2(x)$
0	0	2	2
1	2	0	2
2	2	2	0

される。[1]

$$
\begin{aligned}
&f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\\
&\quad = \{f(0, 0, \cdots, 0) \vee I_0(x_1) \vee I_0(x_2) \vee \cdots \vee I_0(x_n)\}\\
&\quad \cdot \{f(1, 0, \cdots, 0) \vee I_1(x_1) \vee I_0(x_2) \vee \cdots \vee I_0(x_n)\}\\
&\quad \cdot \{f(2, 0, \cdots, 0) \vee I_2(x_1) \vee I_0(x_2) \vee \cdots \vee I_0(x_n)\}\\
&\quad \cdot\\
&\quad \cdot \{f(2, 2, \cdots, 2) \vee I_2(x_1) \vee I_2(x_2) \vee \cdots \vee I_2(x_n)\} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

ここで，$\{f(k_1, k_2, \cdots, k_n) \vee I_{k_1}(x_1) \vee I_{k_2}(x_2) \vee \cdots \vee I_{k_n}(x_n)\}$ を論理和項と呼び，$f(k_1, k_2, \cdots, k_n) = 0, 1, 2$，$I_{k_1}(x_1)$，$I_{k_2}(x_2)$，$\cdots$，$I_{k_n}(x_n)$ を文字と呼ぶ。与えられた論理関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を式（1）の和積標準形で求め，論理和項に含まれる文字の集合を節とする。従って節の要素は次式で与えられる。

$$
\left.
\begin{aligned}
&f(k_1, k_2, \cdots, k_n) = 0 \quad \text{のときは,}\\
&\qquad\qquad I_{k_1}(x_1),\ I_{k_2}(x_2),\ \cdots,\ I_{k_n}(x_n)\\
&f(k_1, k_2, \cdots, k_n) = 1\\
&\qquad\qquad 1,\ I_{k_1}(x_1),\ I_{k_2}(x_2),\ \cdots,\ I_{k_n}(x_n)
\end{aligned}
\right| \qquad (2)
$$

$f(\text{た}_1, \text{た}_2, \cdots, \text{た}_n)=2$

節を作らない。

この節の集合を得て節点とする。この節点は木の根となり，非終端節点である。木の非終端節点のうち，枝出しの行われていない節点を1つ選び，これをSとする。Sから要素数最小の節C_0を選ぶ。これが複数個存在するときは，それらのうちで頻度和最大のものをC_0とする。この選ばれた節C_0に含まれる全ての文字を頻度の大きいものから順に並べ替えたものを$\mathcal{O}_S$とする。$\mathcal{O}_S$の順序に従い，各文字についてSから枝出しを行う。これより新しい節点S_iを定めてSとS_iを枝で結び，この枝には枝出しを行った文字のラベルを付ける。必要な枝出し操作を実施して，有効節点でも無効節点でもなければ，非終端節点とする。枝出しされていない非終端節点がなくなるまで枝出し処理操作を繰返す。終了すれば得られた木について，根から有効節点に至る枝のラベルとなっている文字の積をすべての有効節点について求める。この文字の積をインプリカントとし，これより主項を求める。図1に3値半加算器の論理関数に適用した節展開法が示されている。ここで，節点の節に含まれている大きい円印で囲んだ文

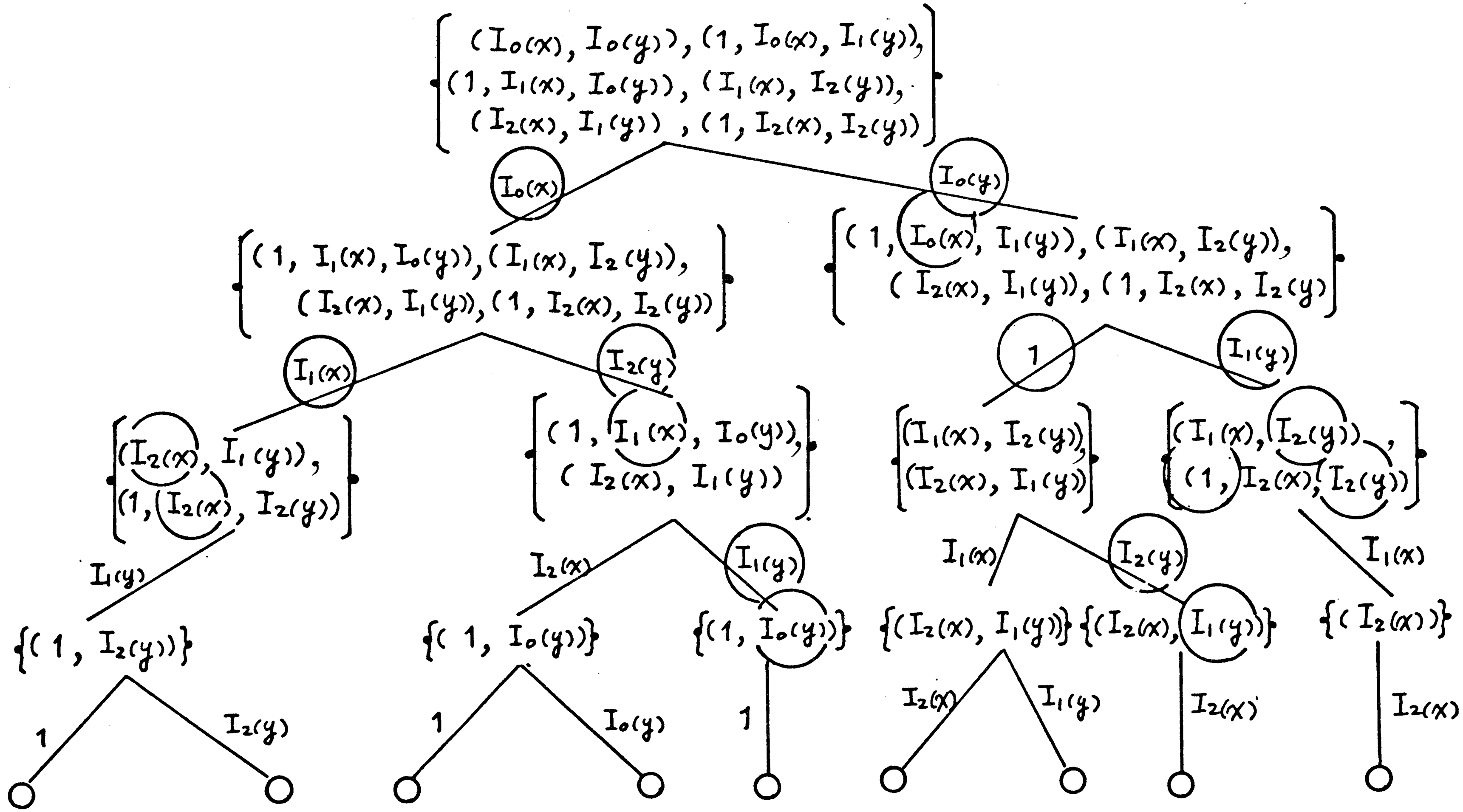

図1　節展開法

Fig.1-Illustrations of ternary clause selection method.

字は未探索の過程で省かれる。なぜなら，$I_0(x_j)I_1(x_j)I_2(x_j)=0$，あるいはすでに抽出された文字であるからである。図1では，$I_0(x)I_1(x)I_2(x)$，$I_0(y)I_1(y)I_2(y)$ となるときの $I_2(x)$，$I_0(y)$，$I_1(y)$，$I_2(y)$ 及び $I_1(x)$，$I_0(x)$，1 の各文字がそれぞれ相当している。図1から得られた主項は次の9個である。

$$\text{1型・2型主項}\left\{\begin{array}{l}
1\cdot I_1(y)\cdot I_1(x)\cdot I_0(x)\\
I_2(y)\cdot I_1(y)\cdot I_1(x)\cdot I_0(x)\\
1\cdot I_2(x)\cdot I_2(y)\cdot I_0(x)\\
I_0(y)\cdot I_2(x)\cdot I_2(y)\cdot I_0(x)\\
1\cdot I_1(y)\cdot I_2(y)\cdot I_0(x)\\
I_2(x)\cdot I_1(x)\cdot 1\cdot I_0(y)\\
I_1(y)\cdot I_1(x)\cdot 1\cdot I_0(y)\\
I_2(x)\cdot I_2(y)\cdot 1\cdot I_0(y)\\
I_2(x)\cdot I_1(x)\cdot I_1(y)\cdot I_0(y)
\end{array}\right.
\qquad
\left\{\begin{array}{l}
x^{001}\cdot y^{101}\\
x^{002}\cdot y^{200}\\
x^{010}\cdot y^{110}\\
x^{020}\cdot y^{020}\\
x^{011}\cdot y^{100}\\
x^{100}\cdot y^{011}\\
x^{101}\cdot y^{001}\\
x^{110}\cdot y^{010}\\
x^{200}\cdot y^{002}
\end{array}\right.$$

従って，得られた主項は2型項と1型項に分離されて生成されたことになる。このために，得られた主項に更に三根ら[4]のコンセンサス法を適用し，一般的な主項を求めている。これより得られた主項は次の6個である。このように改めてコンセンサス法を適用しているから，図1の方法はコンセンサ

ス法の実行の際の前処理的な効果を上げていると考えられる。

$$
\text{主項}\begin{cases}
x^{002}\cdot y^{201}\\
x^{020}\cdot y^{120}\\
x^{200}\cdot y^{012}\\
x^{201}\cdot y^{002}\\
x^{120}\cdot y^{020}\\
x^{012}\cdot y^{200}
\end{cases}
$$

3. 節展開法の改善法

2.で述べた手法によると，3値論理関数の主項が統一した方法により求められなかった。ここでは，論理和項で表わされる節の要素である文字の表現に改良を加えることによって，主項の生成が統一な手法により求められることを明らかにしている。すなわち，節の要素である文字を次式のように表す。

$$
\left.\begin{array}{l}
f(k_1, k_2, \cdots, k_n)=0 \text{ のときは，}\\
\qquad I_{k_1}(x_1), I_{k_2}(x_2), \cdots, I_{k_n}(x_n)\\
f(k_1, k_2, \cdots, k_n)=1\\
\qquad 1\vee I_{k_1}(x_1), 1\vee I_{k_2}(x_2), \cdots, 1\vee I_{k_n}(x_n)
\end{array}\right] \quad (3)
$$

$f(k_1, k_2, \cdots, k_n)=2$

節を作らない。

この節の集合を得て節点とする。

図2に，2．と同様の3値半加算器の論理関数に改良した節展開法を適用した例を示す。ここで，節点の節に含まれている大きい円印で囲んだ文字は木探索の過程で省かれる。なぜなら，$I_0(x_j)I_1(x_j)I_2(x_j)=0$ 及び $I_p(x_j)I_q(x_j)(1\vee I_r(x_j))\longrightarrow I_p(x_j)I_q(x_j)I_r(x_j)=0$；$p\neq q\neq r$；$p, q, r=0, 1, 2$ であるからである。ここで，$(1\vee I_r(x_j))\longrightarrow I_r(x_j)$ とすることができるのは，$(1\vee I_r(x_j))$ を含む節に他の $(1\vee I_{p(\text{又は}q,\text{又は}r)}(x_i))$ の文字があって $(1\vee I_r(x_j))$ の1を $(1\vee I_p(x_i))$ に含めることができるからである。図2においては，$I_0(x)\cdot I_1(x)I_2(x)$，$I_0(x)I_1(x)(1\vee I_2(x))$，$I_0(x)I_2(x)(1\vee I_1(x))$，$I_2(y)I_1(y)(1\vee I_0(y))$，$I_0(y)I_2(y)(1\vee I_1(y))$，$I_2(x)I_1(x)\cdot(1\vee I_0(x))$，$I_0(y)I_1(y)I_2(y)$，$I_0(y)I_1(y)(1\vee I_2(y))$ となるときの，$I_2(x)$，$(1\vee I_2(x))$，$(1\vee I_1(x))$，$(1\vee I_0(y))$，$(1\vee I_1(y))$，$(1\vee I_0(x))$，$I_2(y)$，$(1\vee I_2(y))$ の各文字がこれらに相当している。図2から得られた主項は次の6個で，2．で求めた主項と一致し，統一的な手法で主項が求め

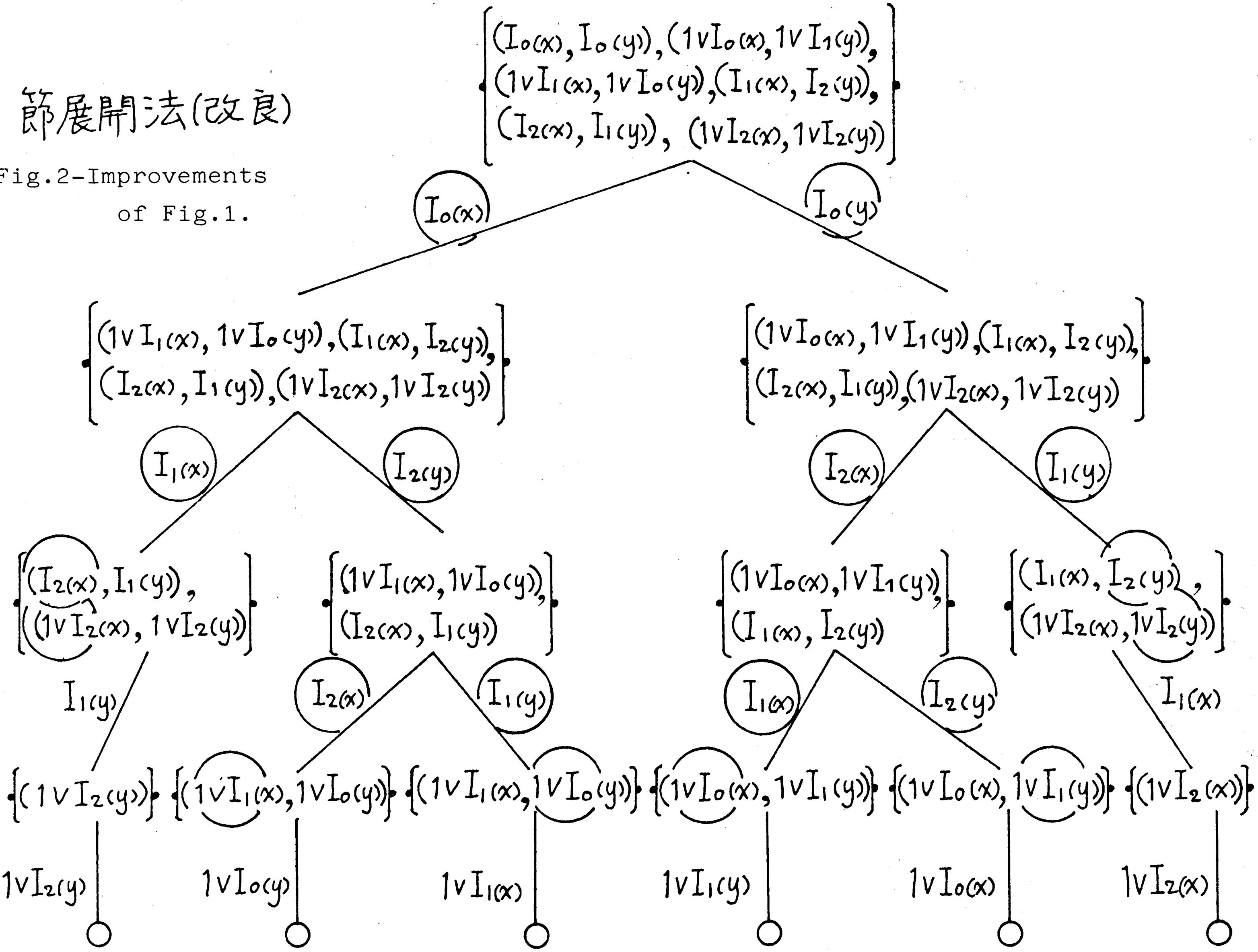

図2 節展開法(改良)

Fig.2-Improvements of Fig.1.

られる。

$$\left\{\begin{array}{l} I_0(x)I_1(x)I_1(y)(1\vee I_2(y)) \\ I_0(x)I_2(x)(1\vee I_0(y))I_2(y) \\ I_0(x)(1\vee I_1(x))I_1(y)I_2(y) \\ I_1(x)I_2(x)I_0(y)(1\vee I_1(y)) \\ (1\vee I_0(x))I_2(x)I_0(y)I_2(y) \\ I_1(x)(1\vee I_2(x))I_0(y)I_1(y) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x^{002}y^{201} \\ x^{020}y^{120} \\ x^{012}y^{200} \\ x^{200}y^{012} \\ x^{120}y^{020} \\ x^{201}y^{002} \end{array}\right.$$

4. むすび

本稿では，節展開法の3値論理関数の主項生成への適用について述べた。しかしながら，主項が2型項と1型項とに分離されて生成されるために，更に多値コンセンサス法を適用することになる。従って，ここでは多値コンセンサス法を実施する場合の途中処理までの効率を上げる役目は果していると考えられるが，十分であるとは言えない。このために，主項生成が統一してできるようにする改善法を提案している。

節展開法の特長は，主項を生成するために探索する木の冗長度を大幅に減少する点にあるが，この効率化は，節点に含まれる節の数を少なくし，節に含まれる文字数を少なくする

ことにより，木の枝数を減少させることにある。これは前処理と呼ばれているが，(12) 本稿の手法にも，これを導入することは有効と考えられ，検討している。

文　献

(1) Porat,D.I.:''Three-valued Digital Systems'',Proc.IEE,Vol.116, No.6,pp.947-954(June 1969).

(2) Slagle,J.R.,Chang,C.L. and Lee,R.C.:"A new algolithm for generating prime implicants", IEEE Trans. Comput.,C-19, pp.304-310(Feb. 1970).

(3) Su,Y.H. and Cheng,P.T.:"Computer minimization of multivalued switching functions",IEEE Trans. Comput.,C-21,pp.995-1003 (Sept. 1972).

(4) 三根，長谷川，原田，島田："多線式多値論理回路網の一論理設計法"，信学論（D），56－D，3，PP.186－193（昭48－03）.

(5) 田山，島田，佐藤："多値論理関数の計算機による簡単化の一手法"，信学論（D），58－D，10，PP.649－650（昭50－10）.

(6) 今西，村中："3値論理とその簡単化の一手法"，信学論（D），J59－D，5，PP.315－322（昭51－05）.

(7) 鉢嶺，木村："3値論理関数の論理設計法"，信学論(D)，J59−D，10，PP.711−718（昭51−10）.

(8) 山本："3値論理関数の代数的方法による簡単化"，信学論(D)，J61−D，3，PP.202−204（昭53−03）.

(9) 大倉，原田，島田，爲貞："電子計算機による多重3値論理関数の簡単化"，情報処理，Vol.19，No.5，PP.421−427（昭53−05）.

(10) 藤田："3値論理関数の簡単化"，信学論(D)，J61−D，11，PP.883−884（昭53−11）.

(11) 大和，尾本："3値n変数関数の表現の簡略化の一手法"，J62−D，1，PP.39−46（昭54−01）.

(12) 上林，岡田，矢島："節展開法を用いた論理関数の主項の生成"，信学論(D)，J62−D，2，PP.89−96（昭54−02）.

(13) 今西，村中："3値論理関数への節展開法の適用"，昭56電気関係学会関西支連大，G8−20.