数理解析研究所講究録
第 456 巻 1982 年 139-151

完全一様分布の計量的性質

信大 教育学部 長坂建二

§0. はじめに

指数和と一様分布論は，WEYL の CRITERION を介在して深く関連している。 一方，計量的性質と言う時には，通常殆んど全てに対して（零集合を除いて）成立する性質のことであり，ARITHMETICS から多少離れ，むしろ ANALYTIC な側面が出てくることが多い。 ところが一様分布論の場合には，普通の指数和の評価が個々の実数列の一様分布性の判定につながり，平均的な指数和の評価が計量的な性質を導出する仕組となっている。 本論ではまずこの仕組みを解析し，次に一様分布と完全一様分布の差異を主として計量的性質の面から議論する。 最後に完全一様分布の概念の変形が最近いくつか提案されているので，ARITHMETIX（フランス数論研究の情報交換誌）と，COQUET（UNIV. VALENCIENNE）の別刷を中心に紹介する。

§1. 一様分布と指数和

実数xに対して，その小数部分を

$$\{x\} = x - [x] \qquad [\cdot] \text{ はガウス記号}$$

で定義すると，$0 \leq \{x\} < 1$ である。$[0,1)$ 内の任意の区間に対して，実数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の小数部分が I に含まれる相対頻度が I の長さに近ずく時に，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は mod 1 で一様分布すると定義する。以降特に断わらない限りは，小数部分の分布を考えるので，$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $u_n \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$（一次元トーラス）上の列とし，mod 1 は省略する。また実数列であっても小数部分を考えていることを明記する場合には，mod 1 や，$\{\ \}$ の記号を用いる。この約束の下で定義を今一度述べると

<u>定義</u> $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$，$u_n\in\mathbb{T}$ が一様分布するとは，任意の区間 $I\subset\mathbb{T}$ に対して

$$\frac{1}{N} S_N(u;I) \longrightarrow \mu_0(I) \qquad (N\to\infty)$$

が成立することである。ここで μ_0 はルベーグ測度（$\mathbb{T}$ 上の HAAR 測度）であり，

$$S_N(u;I) = S_N = \sum_{\substack{1\leq n\leq N \\ u_n\in I}} 1 \qquad \text{である。}$$

実数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が mod. 1 で一様分布するとは，$(\{x_n\})_{n\in\mathbb{N}}$

が一様分布することである。

$I \subset \mathbb{T}$ の定義関数を $\chi_I(\cdot)$ とすれば

$$S_N(u;I) = \sum_{n=1}^{N} \chi_I(u_n)$$

であるから，上の定義は

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \chi_I(u_n) \longrightarrow \int_{\mathbb{T}} \chi_I(x)\,dx \qquad (N \to \infty)$$

とも書くことができる。この表わし方から次の WEYL の CRITERION を想像するのは容易であろう。

<u>WEYL の CRITERION</u>　$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$　$u_n \in \mathbb{T}$ に対して，以下の4つの条件は同値である。

i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は一様分布する

ii) $\mathbb{T}$ 上の任意の RIEMANN 可積分関数 f に対して

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n) \longrightarrow \int_{\mathbb{T}} f(x)\,dx \qquad (N \to \infty)$$

iii) $\mathbb{T}$ 上の任意の連続関数 f に対して

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n) \longrightarrow \int_{\mathbb{T}} f(x)\,dx \qquad (N \to \infty)$$

iv) すべての零でない整数 $p \neq 0$ に対して，

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e_p(u_n) \longrightarrow 0 \qquad (N \to \infty)$$

ここで，$e_p(\xi) = e^{2i\pi p\xi} = e^{2i\pi p\{\xi\}}$ となるから，iv) の条

件は実数列 $(x_n)_{n\in N}$ の mod. 1での一様分布の判定にも使える便利なものであり，指数和との関係も明確になったことと思う。

i) で，RIEMANN 可積分は LEBESGUE 可積分で置き代えられないこと，またすべての一様分布列 $(u_n)_{n\in N}$ に対して

$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n)$ が存在するならば，f は RIEMANN

可積分となることを付け加えておこう。

§2. 計量的性質と指数和

計量的性質を証明するために，測度論から次の補題を準備しておこう。

<u>補題</u> $(S, \mathfrak{F}, \lambda)$ を可測空間，$(X_n)_{n\in N}$ を S 上定義され T 上の値をとる（有界）可測関数列とする。

$$\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N}E\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}X_n\right|^2\right)<\infty$$

ならば，λ に関して殆んどすべての $s\in S$ に対して

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}X_n(s)\longrightarrow 0 \qquad (N\to\infty)$$

<u>証明</u> 確率変数 Y_n が Y に概収束するならば，確率収束もしていて，一般には逆は必ずしも成立しない。 しかし，Y_n

がYに確率収束し，$Y=0$ の場合には逆も成立して，Y_nはYに概収束する。 よってこの補題の場合には $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}X_n$ が0に確率収束することを示せばよい。 つまり任意の$\varepsilon>0$ に対して

$$\lim_{N\to\infty} \lambda\left\{s\in S\ ;\ \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}X_n(s)\right|>\varepsilon\right\}=0$$

を示せばよい。

$$A_N=\left\{s\in S\ ;\ \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}X_n(s)\right|>\varepsilon\right\}$$

とおくと $\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}X_n\right|^2\geqq 0$ だからマルコフの不等式より

$$\varepsilon^2\lambda(A_N)\leq E\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}X_n\right|^2\right)$$

となるから，補題の仮定と上の不等式から

$$\sum_{N=1}^{\infty}\frac{\lambda(A_N)}{N}<\infty$$

が言える。

ここで自然数の増大列$(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ を

$$N_{k+1}\geq(1+\varepsilon)N_k \quad \forall k\in\mathbb{N}$$

となるように取り，整数 M_k を

$$N_k\leq M_k<N_{k+1},\quad \frac{\lambda(A_{M_k})}{M_k}=\min_{N_k\leq N<N_{k+1}}\frac{\lambda(A_N)}{N}$$

のように決める。 実際に $N_0=0$, $N_{k+1}=[(1+\varepsilon)N_k]+1$ とすれば上の条件をみたし，かつ $N_{k+1}/N_k\longrightarrow 1+\varepsilon\quad(k\to\infty)$ である。

$$\sum_{N_k \leq N < N_{k+1}} \frac{\lambda(A_N)}{N} \geq \sum_{N_k \leq N < N_{k+1}} \min_{N_k \leq N < N_{k+1}} \frac{\lambda(A_N)}{N}$$

$$= (N_{k+1} - N_k)\frac{\lambda(A_{M_k})}{M_k} \geq \varepsilon N_k \frac{\lambda(A_{M_k})}{M_k} \geq \varepsilon \lambda(A_{M_k})$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_{M_k}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \lim_{k\to\infty} \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{N_l \leq N < N_{l+1}} \frac{\lambda(A_N)}{N}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \lim_{k\to\infty} \sum_{N < N_k} \frac{\lambda(A_N)}{N} = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\lambda(A_N)}{N} < \infty$$

ボレル・カンテリの第一補題を使って，殆んどすべての $s \in S$ に対して，十分大きなすべての k をとってくると

$$\left| \frac{1}{M_k} \sum_{n=1}^{M_k} X_n(s) \right| < \varepsilon \qquad \left(\lambda(\lim_{k} A_{M_k}) = \lambda(S) \text{より} \right)$$

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は有界可測関数列だから，$\forall n \in \mathbb{N}$，$\forall s \in S$ に対してある正数 $K > 0$ が存在して $|X_n(s)| \leq K$ である。

N を $N_k \leq N < N_{k+1}$ の整数とすると，$\forall s \in S$ に対して

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n(s) - \frac{1}{M_k}\sum_{n=1}^{M_k} X_n(s) = \frac{1}{N}\left(\sum_{n=1}^{N} X_n(s) - \sum_{n=1}^{M_k} X_n(s)\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{M_k}\right)\sum_{n=1}^{M_k} X_n(s)$$

右辺の第一項の絶対値 $\leq \frac{1}{N} \sum_{\min(N, M_k)}^{\max(N, M_k)} |X_n(s)| \leq \frac{K}{N}|M_k - N|$

$\leq \frac{K}{N_k}|M_k - N| \leq \frac{K}{N_k}(N_{k+1} - N_k) \qquad (N_k \leq N,\ M_k < N_{k+1})$

右辺の第二項の絶対値 $\leq \left|\frac{1}{N} - \frac{1}{M_k}\right| \sum_{n=1}^{M_k} |X_n(s)| \leq \frac{|M_k - N| M_k K}{N \cdot M_k}$

$$\therefore \left| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n(s) - \frac{1}{M_k}\sum_{n=1}^{M_k} X_n(s) \right| \leqq 2K\,\frac{N_{k+1}-N_k}{N_k}$$

ここで $N\uparrow\infty$ のときに（$N_k\uparrow\infty$ より）$k\uparrow\infty$ であり，十分大きなすべての N, k について

$$\left| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n(s) \right| \leqq \left| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n(s) - \frac{1}{M_k}\sum_{n=1}^{M_k} X_n(s) \right| + \left| \frac{1}{M_k}\sum_{n=1}^{M_k} X_n(s) \right|$$

$$\leqq 2K\,\frac{N_{k+1}-N_k}{N_k} + \varepsilon$$

$$\leqq 2K\varepsilon + \varepsilon$$

が殆んどすべての $s\in S$ について成立する。これは，$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n(s)$ が 0 に確率収束することだから証明を終る。

この補題を（$\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu_0$）一次元ルベーグ測度空間に適用すると，次の系を得る。

系.（WEYL） 実数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が

$$\underline{\lim}\,(x_{n+1}-x_n) > 0$$

をみたしているとき，殆んどすべての（ルベーグ測度の意味で）$x\in\mathbb{R}$ に対して，$(x\cdot x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は mod. 1 で一様分布する。

証明　$u_n(x) = \{x\cdot x_n\} \in \mathbb{T}$ として，$(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ が殆んどすべての x に対して一様分布することを示せばよい。ここでルベーグ測度は平行移動に関して不変であり，零集合の可算和集合はやはり零集合であることに注意すると，殆んどすべ

ての$x\in\mathbb{T}$に対して，$(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$が一様分布することを示せばよい。WEYL の CRITERION iv)より，零でない任意の整数 p に対して，殆んどすべての$x\in\mathbb{T}$をとってくると

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi p u_n(x)} \longrightarrow 0 \qquad (N\longrightarrow\infty)$$

を示せばよい。今証明した補題を$(\mathbb{T},\mathcal{B},\mu_0)$，$X_n(x)=e^{2i\pi p u_n(x)}$として適用すると

$$\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N}\int_0^1\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi p u_n(x)}\right|^2 dx \quad < \infty$$

を示せばよいことがわかる。仮定から（$x\in\mathbb{T}$より）

$$u_{n+1}(x)-u_n(x)\geq c\cdot x \qquad \forall n,\ c>0 。$$ また

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi p u_n(x)}\right|^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{m,n} e^{2i\pi p(u_m(x)-u_n(x))}$$

$$=\frac{1}{N}+\frac{1}{N^2}\sum_{m\neq n} e^{2i\pi p(u_m(x)-u_n(x))} = \frac{1}{N}+\frac{1}{N^2}\sum_{m\neq n} e^{2i\pi p x(x_m-x_n)}$$

$$\therefore \int_0^1\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi p u_n(x)}\right|^2 dx = \frac{1}{N}+\frac{1}{N^2}\sum_{m\neq n}\int_0^1 e^{2i\pi p x(x_m-x_n)}\,dx$$

$$=\frac{1}{N}+\frac{1}{N^2}\sum_{m\neq n}\frac{e^{2i\pi p(x_m-x_n)}-1}{2i\pi(x_m-x_n)}$$

$$\leq \frac{1}{N}+\frac{1}{N^2}\sum_{m\neq n}\frac{\left|e^{2i\pi p(x_m-x_n)}\right|+1}{2\pi\,|x_m-x_n|}$$

$$\leq \frac{1}{N}+\frac{1}{N^2}\sum_{m\neq n}\frac{1}{\pi c\,|m-n|} \qquad (|x_m-x_n|\geq c|m-n|)$$

第二項のΣの部分は正確に書いて評価すると，

$$\sum_{\substack{m\neq n\\ m=1,\cdots,N\\ n=1,\cdots,N}} \frac{1}{|m-n|} = 2\sum_{0<m<n\leq N} \frac{1}{|m-n|} \leq 2N\left(1+\cdots+\frac{1}{N-1}\right)$$

$$\leq 2N\log N$$

ここで $\displaystyle\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N}\left(\frac{1}{N}+\frac{2\log N}{N\pi C}\right)<\infty$ であるから，補題より証明が終る。

<u>REMARK</u> $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が整数列の場合，この系の仮定は，異なる整数列であれば勿論みたされるので，書き直すと，

<u>定理（WEYL）</u> $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を相異なる整数列とすると殆んどすべての $x\in\mathbb{R}$ に対して $(a_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ は mod. 1 で一様分布する。

これが WEYL 自身によって証明された計量的性質であり，補題や系の証明からも指数和の2乗の平均の評価が計量的性質を導びくことが理解されたことと思う。

<u>系（KOKSMA）</u> 殆んどすべての $\theta>1$ に対して，$(\theta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は mod. 1 で一様分布する。

<u>証明</u> 証明の方針は前の系と同じ方針で，次の積分

$$I=\int_a^b e^{2i\pi p(\theta^m-\theta^n)}\,d\theta$$

$p\neq 0$ の整数，$m>n$ の整数で，$1<a<b$

を評価すれば良い。 $\theta^m-\theta^n=\theta^n(\theta^{m-n}-1)$ は単調増加だから逆関数 $\varphi(t)$ が存在し，$\varphi'(t)=\dfrac{1}{m\varphi(t)^{m-1}-n\varphi(t)^{n-1}}$，

$d\theta=\varphi'(t)\,dt$ となるから，

$$I=\int_{a^m-a^n}^{b^m-b^n}\varphi'(t)\,e^{2i\pi t}\,dt$$ と書き直すことができる。

一方，$|\varphi'(t)|\leq\dfrac{1}{m-n}$ $(t>1)$ に注意すれば，積分区間内のあるξが存在して，積分の第二平均値定理より

$$I=\varphi'(a^m-a^n)\int_{a^m-a^n}^{\xi}e^{2i\pi t}dt+\varphi'(b^m-b^n)\int_{\xi}^{b^m-b^n}e^{2i\pi t}dt$$

$$\therefore |I|\leq\frac{1}{m-n}\left|\int_{a^m-a^n}^{b^m-b^n}e^{2i\pi t}dt\right|\leq\frac{2}{\pi(m-n)}$$

後の計算は前と全く同じである。 ■

§3. 一様分布と完全一様分布

一様分布を強めた概念の一つが完全一様分布である。

<u>定義</u> $(\mathbb{T},\mathcal{B},\mu_0)$ 上の実数列 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が完全一様分布するとは，任意の1以上の整数rに対して，$\mathbb{T}^r$上の数列，$u^{(r)}=((u_n,u_{n+1},\cdots,u_{n+r-1}))_{n\in\mathbb{N}}$ を考え，μ_0^r を直積ルベーグ測度として，$u^{(r)}$が$\mathbb{T}^r$上μ_0^rに関して一様分布することと定義する。

普通の実数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対しては，$(\{x_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ が完全一様分布することを，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が mod. 1 で完全一様分布することと定義すればよい。

$r=1$を考えれば，$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$が完全一様分布するならば，明ら

かに一様分布している。　また完全一様分布の場合の WEYL の CRITERION は，r は 1 以上の任意の整数，$\underline{h} = (h_1, h_2, \cdots, h_r)$ を同時に零にならない整数ベクトルとするとき，

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi(h_1 u_n + h_2 u_{n+1} + \cdots + h_r \cdot u_{n+r-1})} \longrightarrow 0$$

ということになる。

一様分布と完全一様分布との対応を見よう。

実数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$		一様分布 mod.1	完全一様分布 mod.1
$(n\theta)$	$\theta \notin \mathbb{Q}$	○	×
$(n^k\theta)$	$\theta \notin \mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{N}$	○	×
$(n^\sigma\theta)$	$\sigma > 0$, $\sigma \notin \mathbb{N}$	○（$\forall\theta$ について）	×（$\forall\theta$ について）
$(a_n x)$	a_n は異なる整数列	○（殆んどすべての x）	×（一般的には）
(x^n)	$\lvert x\rvert > 1$	○（殆んどすべての x）	○（殆んどすべての x）
$(a_n \cos a_n x)$	a_n は増加自然数列	○（殆んどすべての x）	?
$(f(n))$	$f(x) = e^{c(\log x)^\gamma}$ $c > 0$, $1 < \gamma < \frac{3}{2}$	○	○
$(f(n))$	f は多項式ではない解析関数で $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, $\overline{\lim}\ \frac{\log\log M(r)}{\log r} < \frac{5}{4}$, $M(r) = \sup_{\lvert z\rvert \le r} \lvert f(z)\rvert$	○	○

前頁の対応表より，u_n が多項式程度の増加の場合には，殆んどすべての x についてと条件を緩めても完全一様分布しない。一方増加の度合が大きい実数列に対しては，一様分布すると同時に完全一様分布するものが殆んどであるが，これらの関数列については ad hoc な結果が得られているに過ぎず，統一的に論ずるのはまだ無理のように感じられる。振動する関数に対しては，いくつかの例について計量的な結果での一様分布性は知られているが，完全一様分布についてはわかっていないようである。

§4. 完全一様分布の変形について．

ARITHMETIX の2号と4号に COQUET による次の問題が提示されている。

<u>問題</u> 乗法的完全一様分布について。 $c>0$ とし $(n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ を考え，次の可算集合

$$D=\{c\in\mathbb{R}\ ;\ (1,2^c,3^c,\cdots,n^c,\cdots)\ \text{famille liée sur}\ \mathbb{Q}\}$$

を定義したときに，D について何が言えるか。

ここで乗法的完全一様分布列 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ とは，任意の1以上の整数 $q\geq 1$ に対して，q 次元ベクトル列 $(u_n,u_{2n},\cdots,u_{qn})$ が $\mathbb{T}^q$ 上で μ_0^q に関して一様分布するような $\mathbb{T}$ 上の列のことである。

すると普通の完全一様分布の場合とは，$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ から作るベクトル列の作り方が乗法的である点で違っていることがおわかりであろう。 乗法的完全一様分布の場合にも，殆んどすべての実数xに対して $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(x>1)$ は乗法的に完全一様分布する。 $c>0$として (n^c)はどんな$c>0$であっても完全一様分布しないのは前の対応表で示した通りである。 一方cが問題中のDに属さない時には，$(n^c)_{n\in\mathbb{N}}$は乗法的に完全一様分布する。 そこでこの集合D（可算集合であることは既知である。）の特徴付けが問題となる訳である。

参　考　文　献

RAUZY, G. PROPRIÉTÉS STATISTIQUES DE SUITES ARITHMÉTIQUES, PUF (1976).

COQUET, J. COMMUNICATION PRIVÉE.