数理解析研究所講究録
第459巻 1982年 139-151

解析汎函数の理論におけるワトソン変換

上智大 理工　吉野 邦生

最近，de Roever, Sargos－森本，Zharinov等により，非有界な台を持つ解析汎函数の理論，並びに応用が，研究され，数々の成果を上げつつある。この小文では，波の散乱理論，Regge極理論などで用いられているWatson－Sommerfeld変換を指数型正則函数に対して，定義し，非有界な台を持つ解析汎函数に対して定義されるFourier－Borel変換，並びにAvanissian－Gay変換との関係を調べる。又，これらの間に成り立つ関係を利用することにより，いくつかの応用を見い出すことができる。例えば，昔からよく知られている種々の特殊函数の積分公式に対し，我々の理論が1つの意味附けを行なうことができる。又，Fourier－Borel変換の解析性とAvanissian－Gay変換の漸近展開の間にある関係を調べることもできる。さて，先ず最初にフーリエ・ウルトラ超函数，及び，非有界な台を持つ解析汎函数の定義を与える。

§1. フーリエ・ウルトラ超函数の空間Q_0'とその部分空間$Q'(L:K')$

数々の研究者により，様々な表記法が，使用されているがここでは，Sargos－森本[7]の表記法を採用することにする
今，Ωを$\mathbb{C}^n$の開集合とし，γを$\mathbb{C}^n$上の実数値連続関数とする。この時，

$$H_b(\overline{\Omega}:\gamma)=\{f(z)\in\mathcal{O}(\Omega)\cap C(\overline{\Omega});\ \sup_{z\in\overline{\Omega}}|f(z)|\cdot e^{-\gamma(z)}<+\infty\}$$

とおく。但し，$\mathcal{O}(\Omega)$，$C(\overline{\Omega})$は，それぞれ，Ω上，$\overline{\Omega}$上の正則函数，連続函数の空間を表わす。次に，$K, K'\subset\mathbb{R}^n$をコンパクトな凸集合とし，又，$h_{K'}(x)$をK'の台函数として，試料関数の空間Q_0を次の様に定義する。

$$Q_0=\lim_{\substack{\longleftarrow \\ K,K'\subset\subset\mathbb{R}^n}}\text{proj}\ H_b(\mathbb{R}^n+iK:-h_{K'}(x))$$

Q_0の双対空間をQ_0'で表わし，Q_0'の元をフーリエ・ウルトラ超函数と呼ぶ。さて，Lを$\mathbb{C}^n$の凸開集合で，虚軸方向に有界なものとする時，新しい試料関数の空間$Q(L:K')$を次の様に定義する。

$$Q(L:K')=\lim_{\substack{\longrightarrow \\ \varepsilon>0,\varepsilon'>0}}\text{ind}\ H_b(\overline{L_\varepsilon}:-h_{K'_\varepsilon}(x)-\varepsilon'|x|)$$

Q_0と$Q(L:K')$との間の関係については，最近，Sargos－森本[7]により，次の事実が，証明された。

定理1. Q_0は、$Q(L:K')$の中で点列的に稠密である

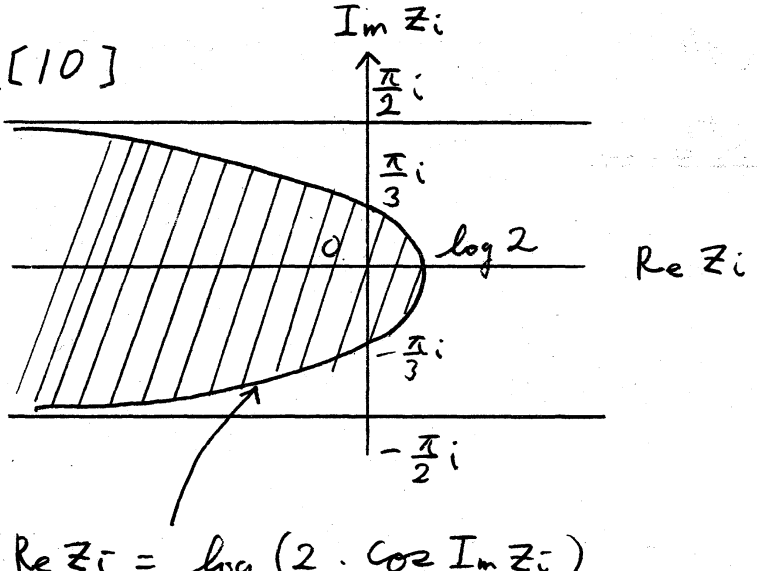
$Q(L:K')$の双対空間を$Q'(L:K')$で表わす時、この定理1により、我々は、$Q'(L:K')$をQ_0'の部分空間と考えることができる。さて、フーリエ・ウルトラ超函数$T\in Q_0'$に対し、$T\in Q'(L:K')$なるL, K'が存在するならば、我々は、TはLにより支えられ、タイプが$h_{K'}$であると言う。ここで、Lの例を幾つか掲げておく。

例1. $L=\mathbb{R}^n+iK$ （K: $\mathbb{R}^n$内のコンパクト凸集合）

この型のLに対しては、Zharinovにより、$Q(L:K')$は詳しく調べられている。（但し、彼の記号では、$\Phi(K:K')$と書く）Zharinov [12]を参照のこと。

例2. $L=\prod_{i=1}^{n} L_i$, $L_i=\{z_i\in\mathbb{C} : |\exp z_i - 1|<1\}$

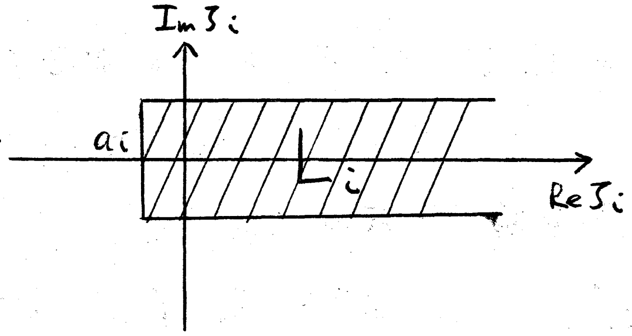
このLは、de Roever [10] Kioustelidias [3]により、指数型正則函数の多項式展開を導く際に利用されている。



以下，本文では，Lとして次の型のものに限定して考える。

$$L = \prod_{i=1}^{n} L_i \qquad L_i = [a_i, \infty) + K_i$$

但し，a_iは，実数であり，K_iは，$\mathbb{R}$のコンパクト区間である



$T \in Q'(L:K')$ の Fourier-Borel 変換を次の様に定義する。

$$\hat{T}(z) = \langle T_\zeta, e^{\zeta z} \rangle$$

ここで，特に，K'として1点$-(t_1', t_2', \cdots, t_n')$のみからなるものを考える。そして，$-t' + \Pi^+ = \{z \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} z_i < -t_i'\}$とおくと，Fourier-Borel 変換は，$Q'(L:-t')$と，$-t' + \Pi^+$上の指数型正則函数の空間$Exp(-t' + \Pi^+ : L)$との間の位相同型（線型）を与える。この事実を定理として述べておこう。

定理 2. （Sargos－森本［7］）次は，位相同型である。

$$Q'(L:-t') \xrightarrow[\text{Borel}]{\text{Fourier}} Exp(-t' + \Pi^+ : L)$$

但し，$Exp(-t' + \Pi^+ : L) = \lim_{\varepsilon > 0,\, \varepsilon' > 0} \operatorname{proj} H_b(-\varepsilon' - t' + \Pi^+ : h_{L_\varepsilon}(z))$

次に，$Q'(L:-t')$の Avanissian-Gay 変換の定義と性質について述べる。

§2. $Q'(L:-\kappa')$のAvanissian-Gay変換

$L_j=[a_j,\infty)+ik_j$ の虚軸方向の成分k_jの幅は，2π未満とし，$\kappa'=(\kappa'_1,\kappa'_2,\cdots,\kappa'_n)$の各成分$\kappa'_j$は，1未満と仮定する。 $\exp(-L)=\prod_{i=1}^{n}\exp(-L_i)$, $\mathbb{C}^n\#\exp(-L)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{C}\setminus\exp(-L_i)$とおく。$w\in\mathbb{C}^n\#\exp(-L)$であると，関数$\prod_{i=1}^{n}(1-w_ie^{\zeta_i})^{-1}$は$Q(L:-\kappa')$に属する。この函数を用いて，我々は，$T\in Q'(L:-\kappa')$のAvanissian-Gay変換を次の様にして定義する。

$$G_T(w)=\langle T_\zeta,\prod_{i=1}^{n}(1-w_ie^{\zeta_i})^{-1}\rangle.$$

$G_T(w)$については，次の事が判っている。(Avanissian-Gay[1]又は，Sargos-森本[7]を参照せよ。)

(i) $G_T(w)\in\mathcal{O}_0(\mathbb{C}^n\#\exp(-L))$

(ii) $|G_T(w)|\leqq C_{\varepsilon,\varepsilon'}|w_1|^{-(\kappa'_1+\varepsilon')}\cdots|w_n|^{-(\kappa'_n+\varepsilon')}$

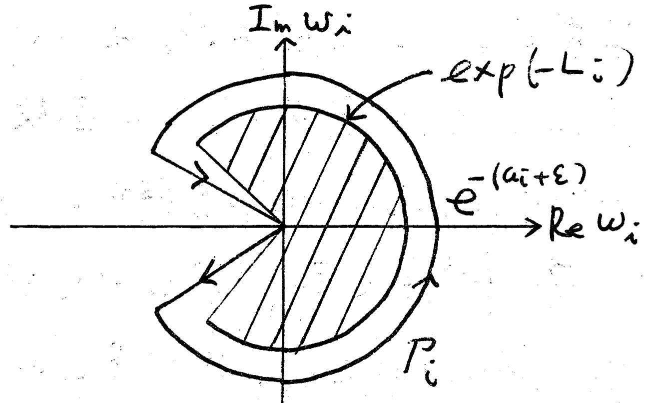
$(\kappa_i+\varepsilon\leqq|\arg w_i|\leqq\pi)$

(iii) $G_T(w)=(-1)^n\sum_{\nu\in\mathbb{N}^n}\tilde{T}(-\nu)w^{-\nu}$ $\quad(|w_i|>e^{-a_i})$

特に，1次元の場合には，上記(iii)は，特殊函数論において重要な意味(例えば，直交多項式の母函数展開に対応している)を持つことが，筆者の計算により判っている。(Yoshino[11])
(i), (ii)の性質を持つ函数の空間を$\mathcal{O}_0(\mathbb{C}^n\#\exp(-L):-\kappa')$と表わす事にし，$\mathcal{O}_0(\mathbb{C}^n\#\exp(-L):-\kappa')$の元に対して，Mellin変換を次の様にして定義する。

$$(2\pi i)^{-1}\int_{P_1\times\cdots\times P_n} g(w_1,w_2,\cdots w_n)\, w_1^{-z_1-1}\cdots w_n^{-z_n-1}\, dw_1\cdots dw_n$$

但し，$g\in \mathcal{O}_0(\mathbb{C}^n\#\exp(-L):-k')$ であり，又，P_iは，次の積分路とする。



以上の定義の下に，我々は，次の可換図式を得る。

定理 3. (Avanissian-Gay [1], Sargos-森本 [7])

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Exp}(-k'+\Pi^+ : L) & \\
Q'(L;-k') \arrow[u, "\text{Fourier-Borel変換}"] \arrow[r, "\text{Avanisian}", "\text{Gay 変換}"'] & \mathcal{O}_0(\mathbb{C}^n\#\exp(-L):k') \arrow[ul, "\text{Mellin変換}"']
\end{tikzcd}$$

勿論，上の3つの変換は，どれも線型位相同型である。又，この可換図式は，特殊関数の積分表示式（例えば，Γ-函数のHankel積分表示式，Legendre関数のSchläfli積分表示式など）と密接な関係にあることが，判っている。これにつ

いては，例えば，森本－吉野〔9〕，吉野〔11〕を参照せよ。

§4. $Exp(-t'+\Pi^+ ; L)$ の Watson－Sommerfeld 変換

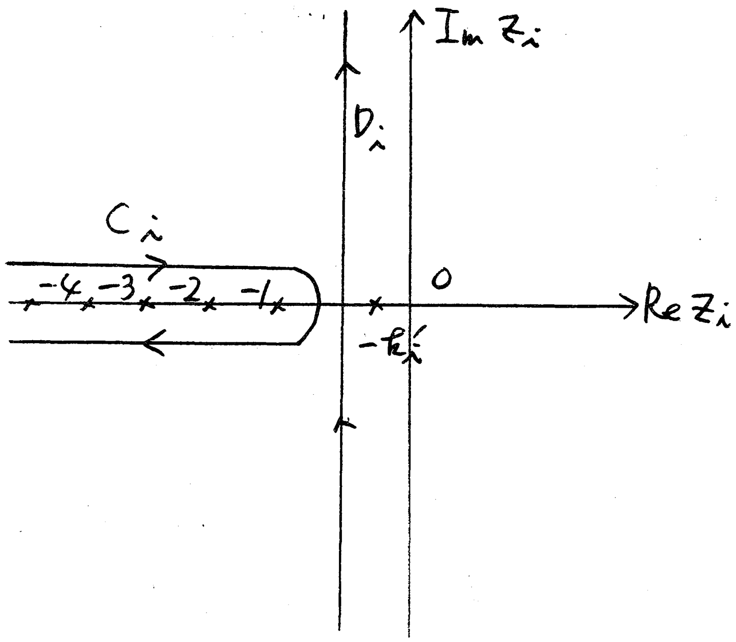
$-t'+\Pi^+$ 上の指数型正則函数 $f(z) \in Exp(-t'+\Pi^+ ; L)$ について，次の積分変換により，Watson－Sommerfeld 変換を定義する。

$$(2\pi i)^{-n} \int_{\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n} f(z_1, \cdots, z_n) \prod_{i=1}^{n} \frac{(-w_i)^{z_i}}{\sin \pi z_i} dz_1 \cdots dz_n$$

但し，積分路 γ_i の取り方は，次の様にする。

$$\gamma_i = \begin{cases} C_i & |w_i| > e^{a_i} \text{ の時，} \\ D_i & t_i \leqq |\arg w_i| \leqq \pi \text{ の時，} \end{cases}$$

C_i, D_i，は，次の図の様に決めておく。



留数計算を実行する事により，次の可換図式を得る。

定理4

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Exp}(-\ell'+\pi^+ : L) \arrow[drr, "\text{Watson-Sommerfeld変換}"] & & \\
Q'(L:-\ell') \arrow[u, "\substack{\text{Fourier}\\ \text{Borel}\\ \text{変換}}"] \arrow[rr, "\text{Aranissian}", "\text{Gay変換}"'] & & \mathcal{O}_0(\mathbb{C}^n \# \exp(-L) : \ell')
\end{tikzcd}$$

以下で，定理4の応用を述べることにする。先ず古典的な定積分計算へ応用してみる。

例1. $T\in Q'(L:-\ell')$ として，$a\in L$ に台を持つデルタ函数を考える。この時，$\hat{T}(z)=e^{az}$，$G_T(w)=(1-we^{a})^{-1}$ となる。上の可換図式により，次の有名な，そしてΓ−関数の重要な関数等式を導びく際に利用される定積分公式

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx=\frac{\pi}{\sin \pi a}\qquad (0<\mathrm{Re}\,a<1)$$

を得る。（〜〜〜は，$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin \pi z}$ の事を指す。）

次に，2番目の例として，Appell関数（又は，Jonquière関数とも呼ばれる）の積分表示式を導びいてみよう。

例2. $L=[0,\infty)$, $0 \leqq k' < 1$ とする。$T \in Q'(L:k')$ を次の様に定義する。$h \in Q(L:k')$ とする。

$$\langle T, h \rangle = (2i \sin(s-1)\pi)^{-1} \int_{\infty}^{(0+)} (-\zeta)^{s-1} h(\zeta) d\zeta$$

Γ-関数のHankel積分表示式により，$\hat{T}(z) = \Gamma(s)(-z)^{-s}$,

$$G_T(w) = -\sum_{n=1}^{\infty} w^{-n} n^{-s} \Gamma(s) = F(s, w^{-1})$$

ここで，$F(s, w)$ は，通常Appell関数と呼ばれているものである。定理4の可換図式により，次の積分表示式を得る。

$$\frac{-1}{2i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{\sin \pi z} \cdot \frac{\Gamma(s)}{(-z)^s} (-w)^z dz = F(s, w^{-1})$$

特に，$w=1$ として，

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{(-z)^{-s}}{1-e^{-2\pi i z}} dz = \zeta(s)$$

を得る。

適当な羽函数を設定することにより，Fock-Mehler変換を計算する事が，できる。次は，その例である。

例3. $t \geqq 1$ とする。K を第1種完全楕円積分とする。

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x} \tanh \pi x \cdot P_{-\frac{1}{2}+ix}(t) dx = 2[t+\sqrt{t^2-1}]^{\frac{1}{2}} K\{[t+\sqrt{t^2-1}]^{-1}\}$$

次に，解析接続に関する定理への応用を示してみる。

<u>定理5.</u>（Sargos−森本） 級数 $\sum_{\nu\in\mathbb{N}^n} a_\nu w^\nu$ は，0でない収束半径を持つとする。この時，次は，同値である。

(i) $f(\nu)=a_\nu$ となる $\mathrm{Exp}(-k'+\pi^+ : L)$ の元 $f(z)$ が，存在する。

(ii) $\sum_{\nu\in\mathbb{N}^n} a_\nu w^\nu$ は，$\mathcal{O}_S(\mathbb{C}^n \# \exp(-L) : k')$ の元に解析接続できる。

我々は，更に，次の事をも導く事ができる。$n=1$ とする。

<u>定理6.</u> $T\in Q'(L:-k')$ とする。この時，次は同値である

(i) $\hat{T}(z)$ は，全平面で有理型で，点 α_i で，位数 β_i の極を持つ。（左半平面では，指数型正則函数である。）

(ii) $G_T(w)$ は，扇形領域 $k\le|\arg w|\le\pi$ で，次の型の漸近展開を持つ。

$$G_T(w)\sim\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\sum_{\ell=1}^{\beta_i} C^i_\ell(\log w)^{\ell}\right\} w^{\alpha_i}$$

例えば，$T\in Q'(L,k')$ を $L=[0,\infty)$，$0\le k'<1$ として，

$$\langle T, h\rangle=\int_0^\infty \xi^k h(\xi)\,d\xi$$

とおくと，$\hat{T}(z)=\left(-\frac{1}{z}\right)^k\Gamma(k+1)$，$G_T(w)=-\Gamma(k+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^{-n}}{n^k}$

従って，$G_T(w)$ は，$G_T(w)\sim\Gamma(k+1)\left\{2\sum_{n=0}^{\frac{k+1}{2}}(-1)^n(1-2^{2n-1})\frac{B_{2n}}{(2n)!}\pi^{2n}(\log(-w))^n+(-1)^{k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n}{n^{k+1}}\right\}$ という漸近展開を持つ。

という漸近展開を持つ。最後に，正則函数の一意性に関する Carlsonの定理の一般化が，得られることを一言附け加えておく。（Mellin変換とWatson-Sommerfeld変換は，互いに逆である。）

<u>定理7</u>（Carlsonの定理の一般化）　$f(z)\in \mathrm{Exp}(-\varepsilon'+\pi^{+};L)$ とする。$f(-\nu)=0$　$(\nu\in N^{n})$ であると，$f(z)\equiv 0$.

この定理7は，特に，量子統計力学において重要である。例えば，温度グリーン関数（松原グリーン関数）に関する Abrikosov-Gor'kov-Dzyaloshinskii-Fradkin の定理（温度グリーン関数から2時間グリーン関数が決定されるという内容）の証明において使われる。（詳しいことについては，岩波講座 現代物理学の基礎5　統計物理学　を参照のこと）又，$n=1$の場合，つまりCarlsonの定理が，散乱振幅を複素角運動量平面に解析接続する際に，その一意性を示すために用いられていることは，非常に有名である。（例えば今村〔2〕を見よ。）更に，Watson-Sommerfeld変換の物理的応用については，Nussenzveig〔5〕を見られたい。又，少し違う視点からWatson-Sommerfeld変換を考えているものにSargos〔6〕がある。最後に，話が少し前後するが，定理5の類似物が，Lebeau〔4〕でもSchwartz超函数を用いて得られており，球面上の超函数の特異性スペクトルの評価に用いられているこ

とを附け加えておく。

参考文献

[1] V. Avanissian and R. Gay : Sur une transformation des fonctionnelles analytiques et ses applications aux fonctions entieres de plusieurs variables, Bull. Soc. Math. France 103 (1975), 341-384.

[2] T. Imamura : 物理と関数論, 岩波書店 1981

[3] J. Kioustelidis : Eine einheitliche methode zur herleitung von reihenentwicklungen fur ganze funktionen von exponentialtyp Compositio Matn. 26 Fasc. 3, (1973) 203-232.

[4] G. Lebeau : Fonctions harmoniques et spectre singulier, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. t 13 (1980) 269-291.

[5] H, M. Nussenzveig : Causality and Dispersion Relations, Academic Press. New York London 1972.

[6] P. Sargos : Prolongement meromorphe des series de Dirichlet associes des fractions rationnelles de plusieur variables (preprint)

[7] P. Sargos and M. Morimoto : Transformations des fonctionnelles analytiques à porteurs non compacts, Tokyo J. Math. 4 (1981). 457-492.

[8] M. Moromoto and K. Yoshino : A uniqueness theorem for holo holomorphic functions of exponential type, Hokkaido Math. J., 7 (1978) 259-270.

[9] M. Morimoto ans K. Yoshino : Some examples of analytic functionals with carrie at the infinity, Proc. Japan Acad., 56(1980) 357-361

[10] J. W. de Roever : Complex Fourier Transformation and Analytic Functionals with Unbounded Carrier, Mathematisch Centrum, Amsterdam

[11] K. Yoshino : Some examples of analytic functionals and their transformations, to appear in Tokyo J. Math.

[12] V. V. Zharinov : Laplace transformation of Fourier Hyperfunctions and related classes of analytic functionals, Theoret. and Math. Phys., 33(1978) 1027-1039