数理解析研究所講究録
第 460 巻 1982 年 214-228

回帰関数の推定における停止規則について

新潟大 理学部 磯貝英一

§1. 序

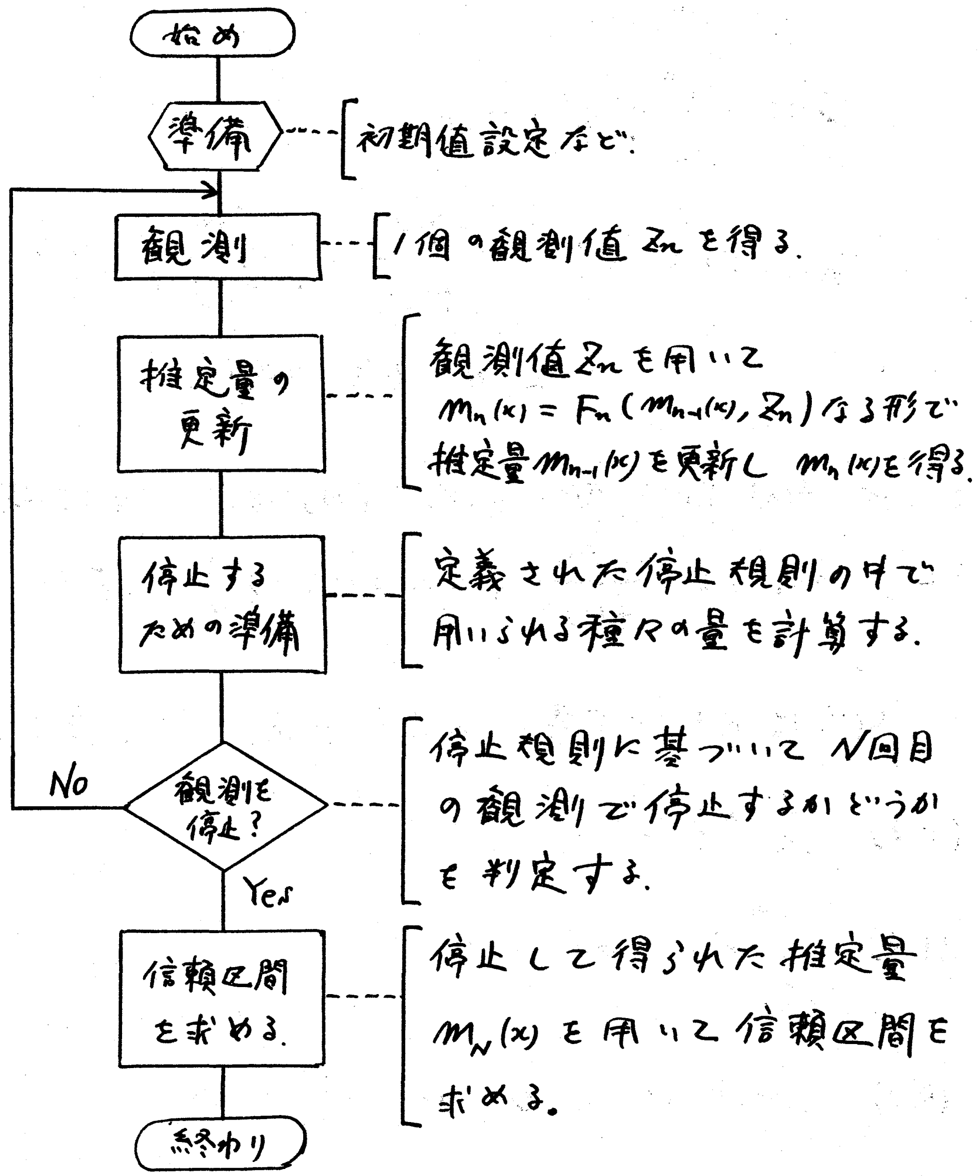
$Z=(X,Y)$, $Z_1=(X_1,Y_1)$, $Z_2=(X_2,Y_2)$, $\cdots$ は独立で同一の（ルベーグ測度に関する）確率密度関数 (p.d.f.) $f^*(x,y)$ をもつ $R\times R$ に値をとる確率ベクトルとする。ただし $f^*(x,y)$ は未知とする。$m(x)=E[Y|X=x]$ を $X=x$ における Y の回帰関数とする。以下では $m(x)$ は R 上で有限であると仮定する。

さて，我々は観測値 $Z_1, Z_2, \cdots$ を得て一点 x における $m(x)$ を区間推定したい。最近電子計算機の進歩に伴なって計算上計算機に適した recursive estimators が提案されるようになっている。（p.d.f. の推定における recursive estimators に関しては たとえば [2] を参照）しかし反復計算を行なっても，実際にはこの反復をどこかで停止し，停止の結果得られた推定量を用いることになる。どこで停止したらよいかという停止の基準は問題毎に異なるであろう。

この報告では $m(x)$ の1つの recursive estimators $\{m_n(x)\}$ を提案し停止規則を定義して一点 x における

$m(x)$ の信頼区間を見つけることを問題とする。（p.d.f. の信頼区間を見つける問題に対してはたとえば［3］を参照）なお，信頼区間を見つけるまでの流れ図は以下のとおりである。

流れ図



§2. 準備

まず次のような記号を導入する。

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x,y)\,dy \qquad \mathfrak{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f^*(x,y)\,dy$$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f^*(x,y)\,dy \qquad t(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |y|^3 f^*(x,y)\,dy$$

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y^4 f^*(x,y)\,dy$$

$$\begin{aligned} Var[Y \mid X = x] &= \frac{g(x)}{f(x)} - \left(\frac{\mathfrak{g}(x)}{f(x)}\right)^2 \quad (f(x) > 0 \text{ のとき}) \\ &= 0 \quad (\text{その他}) \end{aligned}$$

ここに $f(x)$, $\mathfrak{g}(x)$, $g(x)$, $t(x)$, $\psi(x)$ は R 上で有限であるとし，$m(x) = \dfrac{\mathfrak{g}(x)}{f(x)}$ $(f(x) > 0$ のとき$)$ とする。

$K(x)$ は R 上で有界な p.d.f. であり，次を満たすとする。

(K1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x K(x)\,dx = 0$

(K2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 K(x)\,dx < \infty$

(K3) $|x| K(x) \longrightarrow 0$ as $|x| \to \infty$.

$\{h_n, n \geqq 1\}$ は 0 に収束する正数列で以下の条件のいくつかを満たすとする：

(H1) $h_{n_0} \geqq h_{n_0+1} \geqq \cdots$ for some positive integer n_0

(H2) $n_0 h_{n_0} \leqq (n_0+1) h_{n_0+1} \leqq \cdots$ for some positive integer n_0

(H3) $\lim_{n\to\infty} n h_n = \infty$

(H4) $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 h_n)^{-1} < \infty$

(H5) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{h_n}{h_{n+1}} = 1$

(H6) $\lim_{n\to\infty} n^{1+\eta} h_n^5 = 0$ for some constant $\eta > 0$.

さて $m(x)$ の recursive estimators $\{m_n(x), n \geqq 0\}$ を次で与える： 各 $x \in R$ に対して

$$m_0(x) \equiv 0, \quad f_0(x) \equiv c \quad (c \text{ は任意の正定数})$$

(2.1)
$$f_n(x) = f_{n-1}(x) + a_n \{K_n(x, X_n) - f_{n-1}(x)\}$$
$$m_n(x) = m_{n-1}(x) + a_n G(f_n(x)) \{Y_n - m_{n-1}(x)\} K_n(x, X_n)$$
$$(n = 1, 2, \cdots)$$

ただし

(2.2)
$$a_n = \frac{a}{n} \quad (0 < a \leqq 1) \quad n = 1, 2, \cdots$$

$$G(y) = \frac{1}{y} \quad (y > 0 \text{ のとき})$$
$$= 0 \quad (\text{その他})$$

$$K_n(x,y) = \frac{1}{h_n} K\left(\frac{x-y}{h_n}\right).$$

次に停止規則を定義するために以下の量を定義する.

$$\mathfrak{g}_0(x) \equiv 0, \quad g_0(x) \equiv 0$$

$$\mathfrak{g}_n(x) = \mathfrak{g}_{n-1}(x) + a_n\{Q_n(x, Z_n) - \mathfrak{g}_{n-1}(x)\}$$

$$g_n(x) = g_{n-1}(x) + a_n\{G_n(x, Z_n) - g_{n-1}(x)\}$$

ただし $Z_n = (X_n, Y_n)$,

各 $z = (u, y) \in R \times R$ に対して

$$Q_n(x, z) = y K_n(x, u), \quad G_n(x, z) = y^2 K_n(x, u)$$

(2.3) $$v_n(x) = \frac{g_n(x)}{f_n(x)} - \left(\frac{\mathfrak{g}_n(x)}{f_n(x)}\right)^2 \quad (f_n(x) > 0 \text{ のとき})$$

$$= 0 \quad (\text{その他})$$

例 2.1

(K 1), (K 2), (K 3) を満たす例.

(i) $K(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (|x| \leqq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$ (ii) $K(x) = \begin{cases} 1 - |x| & (|x| \leqq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$

(iii) $K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty < x < \infty)$ (iv) $K(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \quad (-\infty < x < \infty)$

例 2.2

(H1) から (H6) までを満たす例.

$$h_n = n^{-r} \quad \left(\frac{1}{5} < r < 1\right)$$

R上で定義された実数値関数 θ に対して $C(\theta)$ は θ の連続点の集合を表わすとする。

補題1 ($m_n(x)$ の強一致性)

$E[Y^2] < \infty$ を仮定する。(H4) が満たされるとする。このとき $f(x) > 0$ なる各点 $x \in C(f) \cap C(g) \cap C(g)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} m_n(x) = m(x) \quad \text{a.s.}$$

が成立する, ただし $A \cap B$ は集合 A と B の積集合を表わす.

次に $\sqrt{nh_n}\,(m_n(x) - m(x))$ の漸近正規性が成立するために満たすべき, (2.2) における a と $\{h_n\}$ に関する1つの条件を定義しておく。

定義1

次の3つの条件が満たされるとき, 条件 A が成立するという。

$0 < a \leqq 1$ なるある a に対して

(A1) $\lim_{n\to\infty} n^{1-2a} h_n = 0$,

(A2) ある正の定数 β が存在して $\lim_{n\to\infty} n^{1-2a} h_n \sum_{j=1}^{n} j^{-2(a-1)} h_j^{-1} = \beta$,

(A3) $\lim_{n\to\infty} (nh_n)^{\frac{3}{2}} n^{-3a} \sum_{j=1}^{n} j^{3(a-1)} h_j^{-2} = 0$,

ただし $\{h_n, n \geqq 1\}$ は 0 に収束する正数列であり, β は a と $\{h_n\}$ のとり方に関係した定数である。

例 2.3

$$h_n = n^{-r} \left(\frac{1}{5} < r < 1\right) \quad n=1,2,\cdots \quad \frac{1-r}{2} < a \leqq 1$$

とする。このとき $\beta = \dfrac{1}{2a+r-1}$ として条件 A が成立する。

C を R 上の連続な関数の集合, C^2 を R 上で 2 回連続微分可能な関数の集合を表わすとする。

条件 (K4) を次で与える。

(K4) $\sup_{-\infty < x < \infty} |x| K(x) < \infty$

例 2.1 で与えられた $K(x)$ はすべて (K4) を満たすことがわかる。

補題 2 (漸近正規性)

$E[Y^2]<\infty$ を仮定する。条件Aが成立し, (H3), (H4), (H6) が満たされるとする。$g\in C$, $f, g\in C^2$ かつ $f''(x)$, $g''(x)$ はR上で有界であると仮定する。$f(x)>0$ かつ $Var[Y|X=x]>0$ なる点 x を考える。このとき

(i) $K(u)$ はR上で有界である

または

(ii) $E[|Y|^3]<\infty$, $K(u)$ は x のある近傍で有界でかつ (K4) が満たされる

のいずれか一方が成立すれば

$$\sqrt{nh_n}\,(m_n(x)-m(x)) \xrightarrow[\mathcal{L}]{} N(0,\sigma^2(x)) \quad \text{as } n\to\infty$$

が成立する, ただし

$$(2.4)\qquad \sigma^2(x)=a^2\beta\, Var[Y|X=x]\int_{-\infty}^{\infty}K^2(u)\,du\Big/f(x),$$

"$\xrightarrow[\mathcal{L}]{}$" は法則収束を表わす, $N(0,\sigma^2)$ は平均が0分散が σ^2 の正規分布に従う確率変数を表わす。

§3. 結果

この節では停止規則を定義して一点 x における $m(x)$ の, 信頼係数が α, 区間の長さが $2d$ の信頼区間を見つけることにする。

$0<\alpha<1$, $d>0$ が任意に与えられたとする。

$D=D_\alpha>0$ は $\Phi(D)-\Phi(-D)=\alpha$ を満たす定数とする，ただし Φ は標準正規分布関数である。

さて停止規則 $N(d,x)$ を次のように定義する：

$N(d,x)=$ smallest integer $n\geq 1$ such that

(3.1) $\qquad (D^2B)^{-1}d^2nh_n \geqq \dfrac{v_n(x)}{f_n(x)}>0$ if such an n exists

$\qquad = +\infty$ otherwise,

ただし $\quad B=a^2\beta\int_{-\infty}^{\infty}K^2(u)du$, a は (2.2), β は (A2) にあるもの，

$v_n(x)$ は (2.3) で定義されたものである。

注意

a, $\{h_n\}$ 従って β, $K(x)$, データ Z_n が与えられれば停止規則を規定する条件式 (3.1) は実際に計算が可能になる。

$n(d,x)$ を次のように定義する：

$n(d,x)=$ smallest integer $n\geq 1$ such that

$\qquad (D^2B)^{-1}d^2nh_n \geqq Var[Y|X=x]/f(x)>0$ if such an n exists

$\qquad = +\infty$ otherwise.

次に $m(x)$ の信頼区間を次のように定義する：

$$I_{n,d}(x) = [\, m_n(x) - d\,,\; m_n(x) + d\,],$$

ただし $m_n(x)$ は (2.1) で定義されたものである。
もし $N(d, x) < \infty$ のとき $N(d, x)$ 回で観測を停止し $I_{N(d,x),d}(x)$ を $m(x)$ の信頼区間とする。このときある条件の下で

$$\lim_{d \to 0} P\{\, m(x) \in I_{N(d,x),d}(x) \,\} = \alpha$$

が成立する。Chow & Robbins [1] によればこのような性質を asymptotic consistency (of fixed-width sequential confidence intervals) という。

以下では上の結果を導びく。

<u>補題 3</u> （停止規則の性質）

$E[Y^2] < \infty$ を仮定する。(H3), (H4), (H5) が満たされるとする。$f(x) > 0$ かつ $Var[Y|X=x] > 0$ で $x \in C(f) \cap C(g) \cap C(\tilde{g})$ なる点 x を考える。このとき

(i) $\psi(u)$ は R 上で有界である

または

(ii) $E[Y^4] < \infty$, $\psi(u)$ は x のある近傍で有界でかつ (K4) が満たされる

のいずれか一方が成立すれば以下が成り立つ。

$$P\{N(d,x)<\infty\}=1 \quad \text{for each } d>0$$

$$N(d,x)\uparrow\infty \quad \text{as } d\downarrow 0 \quad \text{a.s.}$$

$$\lim_{d\to 0}\frac{N(d,x)h_{N(d,x)}d^2}{D^2\sigma^2(x)}=1 \quad \text{a.s.}$$

$$\lim_{d\to 0}\frac{N(d,x)h_{N(d,x)}}{n(d,x)h_{n(d,x)}}=1 \quad \text{a.s.}$$

ここに $\sigma^2(x)$ は (2.4) で与えられたものである。

命題 1

補題 3 の条件の下で

$$\lim_{d\to 0} m_{N(d,x)}(x)=m(x) \quad \text{a.s.}$$

が成立する。

（証明） 補題1, 3 と Richter [4] の定理 1 を用いれば 結果が得られる。 □

補題 4

$E[Y^2]<\infty$ を仮定する。(H1) から (H6) までが満たされるとする。(2.2) のある a に対して条件 A が成立すると仮定する。$f, g\in C^2$ で $f''(x)$, $g''(x)$ は R 上で

有界であるとする。 $f(x)>0$ かつ $Var[Y|X=x]>0$ で $x\in C(g)$ なる点 x を考え，次の条件のいずれか一方が成立するとする．

(i) $\psi(u)$ は R 上で有界である．

または

(ii) $E[Y^4]<\infty$，$\psi(u)$ は x のある近傍で有界で (K4) が満たされる。

このとき，もし

$$\lim_{d\to 0}\frac{N(d,x)}{n(d,x)}=1 \quad \text{in probability}$$

が成立すれば

$$\sqrt{N(d,x)\,h_{N(d,x)}}\left(m_{N(d,x)}(x)-m(x)\right)\xrightarrow[\mathcal{L}]{} N(0,\sigma^2(x)) \quad \text{as } d\to 0$$

が成り立つ．

さて補題4を用いて主定理を与える。

<u>定理 1</u>

補題4の条件の下で

$$\lim_{d\to 0}P\{m(x)\in I_{N(d,x),d}(x)\}=\alpha$$

が成り立つ。

（証明）　補題3，4より

$$
\begin{aligned}
&Dd^{-1}(m_{N(d,x)}(x) - m(x)) \\
&= \sqrt{\frac{D^2\sigma^2(x)}{N(d,x)h_{N(d,x)}d^2}}\sqrt{\frac{N(d,x)h_{N(d,x)}}{\sigma^2(x)}}(m_{N(d,x)}(x) - m(x)) \\
&\xrightarrow[\mathcal{L}]{} N(0,1) \quad \text{as } d \to 0.
\end{aligned}
$$

従って

$$
\begin{aligned}
&\lim_{d\to 0} P\{m(x) \in I_{N(d,x),d}(x)\} \\
&= \lim_{d\to 0} P\{|Dd^{-1}(m_{N(d,x)}(x) - m(x))| \leqq D\} \\
&= P\{|N(0,1)| \leqq D\} = \alpha.
\end{aligned}
$$

□

系1

$E[Y^2] < \infty$ を仮定する。$g \in C$，$f, g \in C^2$ かつ $f''(x)$，$g''(x)$ は R 上で有界であると仮定する。

(3.2)　$h_n = n^{-r}$　$(\frac{1}{5} < r < 1)$　$n = 1, 2, \cdots$

とおき，(2.2)の α は

(3.3) $\dfrac{1-r}{2} < a \leqq 1$

を満たすとする。点 x は $f(x) > 0$ かつ $Var[Y|X=x] > 0$

を満たし，補題4の(i)または(ii)のいずれか一方

が成立するとする。

このとき

$$\lim_{d \to 0} P\{m(x) \in I_{N(d,x),d}(x)\} = \alpha$$

が成り立つ。

系2

(X, Y) は 2変量正規分布に従うとする，

すなわち

$$f^*(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right\}\right],$$

ここに

$$0 < \sigma_1, \sigma_2 < \infty, \ |\rho| < 1$$

とする。

$\{h_n\}$, a はそれぞれ (3.2), (3.3) で与えられたものと

する。

このとき すべての点 x に対して

$$\lim_{d\to 0} P\{m(x) \in I_{N(d,x),d}(x)\} = \alpha$$

が成り立つ。

参考文献

[1] Chow, Y. S., and Robbins, H. On the asymptotic theory of fixed-width sequential confidence intervals for the mean. Ann. Math. Statist., 36 (1965), 457–462.

[2] Isogai, E. Strong consistency and optimality of a sequential density estimator. Bull. Math. Statist., 19 (1980), No. 1 ~ 2, 55–69.

[3] Isogai, E. Stopping rules for sequential density estimation. Bull. Math. Statist., 19 (1981), No. 3 ~ 4, 53–67.

[4] Richter, W. Limit theorems for sequences of random variables with sequences of random indeces. Theory Probability appl., 10 (1965), 74–84.