数理解析研究所講究録
第 462 巻 1982 年 46-57

半線形発展方程式に応ずる非線形半群について

航空宇宙技研　　高橋匡康

本稿では，Banach空間において半線形発展方程式の mild solutions を与える非線形半群の特徴づけ，積公式及び収束に関する結果を述べる．

§1. 基本的な仮定

X を Banach空間，$p: X \to [0,\infty]$ を適正な下半連続凸関数とし，$D(p)$ で p の effective domain を表わす。A を X における線形閉作用素，B を X における非線形作用素とし，$C = D(B) \cap D(p)$ とおく。ここでは $A+B$ の形の半線形作用素を考え，次の形の半線形発展方程式に対する初期値問題を考える：

(1)　$(d/dt)u(t) = (A+B)u(t)$, $t>0$;　$u(0) = x \in C$.

線形閉作用素 A に対しては次の条件を仮定する：

(H_1)　A は X 上のクラス (C_0) の線形縮小半群 $\{T(t)\,;\, t \geq 0\}$ の生成作用素である．

次に非線形作用素Bに対する条件であるが，ここではBの連続性や消散性は汎関数pに依存するものとし，次の形の条件を仮定する：

(H$_2$) 各$\alpha>0$に対して　$C_\alpha \equiv C\cap\{x\in X\,;\,p(x)\leq\alpha\}$はXの閉凸部分集合である．

(H$_3$) Bは各C_α上で連続である．

(H$_4$) 各$\alpha>0$に対して適当な実数ω_αを取れば，$B-\omega_\alpha I$はC_α上で消散的(dissipative)である．

このような設定のもとでは，(1)の$[0,\infty)$上のmild solution，すなわち次の積分方程式

$$(2)\qquad u(t)=T(t)x+\int_0^t T(t-\tau)Bu(\tau)\,d\tau,\quad t\geq 0$$

を満足する$[0,\infty)$上のX値連続関数uの存在を示すためには，$p(u(t))$の評価が必要となる。$p(u(t))$を評価するために，ここでは$[0,\infty)$上で連続かつ非減少な非負値関数gを考え，次の条件を仮定する：

(H$_5$) 各$\alpha\geq 0$に対して，初期値問題

$$w'(t)=g(w(t)),\quad t>0;\qquad w(0)=\alpha$$

の$[0,\infty)$上でのmaximal solution $m_g(\cdot\,;\alpha)$が存在する．

<u>注意</u>. 以下の定理はgの非減少性なしでも成立する．

条件 (H_5) のもとでは次が成立する．

補題 1．条件 (H_5) を仮定する．このとき任意の $\varepsilon > 0$ と $\alpha \geqq 0$ に対して初期値問題

$$w'(t) = g(w(t)) + \varepsilon, \quad t > 0; \qquad w(0) = \alpha$$

の $[0, \infty)$ 上での maximal solution $m_{g+\varepsilon}(t; \alpha)$ が存在し，$\varepsilon \downarrow 0$ のとき $m_{g+\varepsilon}(\cdot\,; \alpha)$ は $m_g(\cdot\,; \alpha)$ に $[0, \infty)$ 上で広義一様収束する．

補題 2．条件 (H_5) を仮定し，$\varepsilon > 0$，$\alpha \geqq 0$，$\beta \geqq 0$，$t > 0$ とする。このとき，$\beta \leqq \alpha + t\{g(\alpha) + \varepsilon\}$ ならば $\beta \leqq m_{g+\varepsilon}(t; \alpha)$ である。

§2．半群の特徴づけ

定理 1．条件 $(H_1) - (H_5)$ のもとで次は同値である：

(I) 次の 2 条件を満足する C 上の半群 $\{S(t); t \geqq 0\}$ が存在する．

(i) $\displaystyle S(t)x = T(t)x + \int_0^t T(t-\tau)BS(\tau)x\,d\tau, \quad t \geqq 0, \ x \in C;$

(ii) $p(S(t)x) \leqq m_g(t; p(x)), \quad t \geqq 0, \ x \in C.$

(II) 任意の $x \in C$ に対して次を満足する正数より成る null sequence $\{h_n\}$ と C における点列 $\{x_n\}$ が存在する．

(i) $\lim_{n\to\infty} h_n^{-1}\|T(h_n)x + h_n Bx - x_n\| = 0$;

(ii) $\overline{\lim_{n\to\infty}}\ h_n^{-1}(p(x_n) - p(x)) \leqq g(p(x))$.

(III) $\bigcup_{\alpha>0}\overline{D(A)\cap C_\alpha} = C$ であり，任意の $\alpha>0$ と $\varepsilon>0$ に対して正数 $\lambda_0 \equiv \lambda_0(\alpha,\varepsilon)$ が存在し，各 $x\in C_\alpha$ と $\lambda\in(0,\lambda_0)$ に対して次を満足する要素 $x_\lambda \in D(A)\cap C$ が存在する．

(i) $x_\lambda - \lambda(A+B)x_\lambda = x$;

(ii) $p(x_\lambda) \leqq p(x) + \lambda\{g(p(x)) + \varepsilon\}$.

(IV) $\bigcup_{\alpha>0}\overline{D(A)\cap C_\alpha} = C$ であり，任意の $x\in C$ に対して次を満足する正数より成る null sequence $\{\lambda_n\}$ と $D(A)\cap C$ における点列 $\{x_n\}$ が存在する．

(i) $\lim_{n\to\infty} \lambda_n^{-1}\|x_n - \lambda_n(A+B)x_n - x\| = 0$;

(ii) $\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \lambda_n^{-1}(p(x_n) - p(x)) \leqq g(p(x))$.

注意 1. (I)-(ii) は各 $x\in C$ に対して $p(S(\cdot)x)$ が Bihari 型の不等式

$$p(S(t)x) \leqq p(x) + \int_0^t g(p(S(\tau)x))\,d\tau, \quad t\geqq 0$$

を満足することと同等である。

注意 2. (I) ⇒ (II)，(III) ⇒ (IV) の証明は容易である。(II) ⇒ (I) は補題 2 と Pavel [9]，Kenmochi-Takahashi [2] の議論を組み合わ

せて証明される．(III) ⇒ (I) は次の指数公式

$$S(t)x = \lim_{n\to\infty}(I - \tfrac{t}{n}(A+B))^{-n}x, \quad t \geq 0,\ x \in C$$

が成立することを意味する。(IV) ⇒ (I) は補題2と Kobayashi [3] の議論を用いて証明される．以上の議論では p と C の convexity は不要である．

以下では (I) を仮定し，(I) ⇒ (III) を証明する．

<u>補題 3</u> (cf. [4]). $\bigcup_{\alpha>0}\overline{D(A)\cap C_\alpha} = C$.

証明. $\alpha>0$ とし $x\in C_\alpha$ とする．各 $t>0$ に対し $x_t = \frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)x\,d\tau$ とおくと，(I)-(ii) より十分小なる $t>0$ に対して $x_t\in C_{\alpha+1}$ である。また，

$$x_t = \frac{1}{t}\int_0^t T(\tau)x\,d\tau + \frac{1}{t}\int_0^t\left\{\int_0^\tau T(\tau-\sigma)BS(\sigma)x\,d\sigma\right\}d\tau$$

であるから容易に $x_t\in D(A)$ であることが示せる。$t\downarrow 0$ のとき $x_t\to x$ だから補題が証明される．

次に，$\alpha>0$, $\varepsilon>0$ とし $\delta\in(0,1]$ を次のような数とする:

$|\xi-\eta|\leq\delta$, $\xi,\eta\in[0,\alpha+1]$ ならば $|g(\xi)-g(\eta)|\leq\varepsilon/2$.

$\omega=\max\{0,\omega_{\alpha+1}\}$ とし，$\lambda_0=\min\{1/\omega,\ \delta/g(\alpha+1)+\varepsilon\}$ とおく。さて，$x\in C_\alpha$, $\lambda\in(0,\lambda_0)$ を固定し，$\beta = p(x)+\lambda\{g(p(x))+\varepsilon\}$ と

おくと次の補題が成立する．

補題4．各 $z \in C_\beta$ に対して

$$\lim_{h \downarrow 0} h^{-1} d(T(\lambda h)z + \lambda h Bz - hz + hx, C_\beta) = 0,$$

但し，$d(\cdot,\cdot)$ は X における距離を表わす．

証明．$z \in C_\beta$ とし，$h_0 \in (0,1]$ を次のような数とする：

$$h \in (0, h_0] \text{ ならば } m_g(\lambda h; p(z)) \leqq p(z) + \lambda h\{g(p(z)) + \varepsilon/2\}.$$

各 $h \in (0, h_0]$ に対して $z_h = (1-h)S(\lambda h)z + hx$ とおくと $z_h \in C$ である．また p は convex だから

$$\begin{aligned}
p(z_h) &\leqq (1-h)p(S(\lambda h)z) + hp(x) \\
&\leqq (1-h)m_g(\lambda h; p(z)) + hp(x) \\
&\leqq (1-h)p(z) + h(p(x) + \lambda g(p(z)) + \lambda\varepsilon/2) \\
&\leqq (1-h)\beta + h(p(x) + \lambda g(p(x)+\delta) + \lambda\varepsilon/2) \\
&\leqq (1-h)\beta + h(p(x) + \lambda g(p(x)) + \lambda\varepsilon) \\
&= \beta
\end{aligned}$$

を得る。従って，各 $h \in (0, h_0]$ に対して $z_h \in C_\beta$ である。さて

$$\begin{aligned}
&h^{-1} d(T(\lambda h)z + \lambda h Bz - hz + hx, C_\beta) \\
&\leqq h^{-1} \| T(\lambda h)z + \lambda h Bz - hz + hx - z_h \| \\
&\leqq h^{-1} \| T(\lambda h)z + \lambda h Bz - S(\lambda h)z \| + \| S(\lambda h)z - z \|
\end{aligned}$$

であり，$h \downarrow 0$ のとき，$(\lambda h)^{-1}[S(\lambda h)z - T(\lambda h)z] \to Bz$，$S(\lambda h)z \to z$ だから補題が成立する。

次の補題は(III)−(i), (ii)が成立することを示している。

<u>補題5</u>. 次を満足する C_β 上の半群 $\{S_\lambda(t); t \geqq 0\}$ が存在する。

(a) $S_\lambda(t)z = T(\lambda t)z + \int_0^t T(\lambda t - \lambda\tau)(\lambda B - I + x)S_\lambda(\tau)z\,d\tau$, $t \geqq 0$, $z \in C_\beta$;

(b) $\|S_\lambda(t)z - S_\lambda(t)w\| \leqq e^{(\lambda\omega - 1)t}\|z - w\|$, $t \geqq 0$, $z, w \in C_\beta$;

(c) $S_\lambda(t)$ は共通の不動点 $x_\lambda \in C_\beta$ をもつ，すなわち，

$$0 = \lambda(A+B)x_\lambda - x_\lambda + x$$

を満足する要素 $x_\lambda \in D(A) \cap C_\beta$ が存在する。

証明. 補題4は，定理1の(II)が A を λA で，B を $\lambda B - I + x$（但し，$D(\lambda B - I + x) = C_\beta$）でおきかえ，$p \equiv 0$，$g \equiv 0$ として成立することを意味する。従って，(a)が成立する。(b)は Pavel [9] と同様の議論により示される。$\lambda\omega - 1 < 0$ だから，(c)は(b)より導かれる。

§3. 積公式

この節では，条件(H_1)−(H_5)に加えて次の条件を考える。

(H_6) 各 $t \geqq 0$ と $x \in C$ に対して，$T(t)x \in C$ であり

$p(T(t)x) \leqq p(x)$ である。

(H_7) 次を満足する C 上の半群 $\{U(t); t \geqq 0\}$ が存在する。

(i) $U(t)x = x + \int_0^t BU(\tau)x\,d\tau$, $t \geqq 0$, $x \in C$;

(ii) $p(U(t)x) \leqq m_g(t; p(x))$, $t \geqq 0$, $x \in C$.

注意1. 条件 (H_6) と (H_7) はそれぞれ次の条件と同値である：

$(H_6)^*$ 各 $\lambda > 0$ と $x \in C$ に対して，$(I-\lambda A)^{-1}x \in C$ であり $p((I-\lambda A)^{-1}x) \leqq p(x)$ である．

$(H_7)^*$ 任意の $\alpha > 0$ と $\varepsilon > 0$ に対して正数 $\lambda_1 \equiv \lambda_1(\alpha, \varepsilon)$ が存在し，各 $x \in C_\alpha$ と $\lambda \in (0, \lambda_1)$ に対して $(I-\lambda B)^{-1}x$ は意味をもち次を満足する．

$$p((I-\lambda B)^{-1}x) \leqq p(x) + \lambda\{g(p(x)) + \varepsilon\}.$$

注意2. 条件 (H_6) と (H_7)，もしくは条件 $(H_6)^*$ と (H_7) のもとでは定理1の (II) が満足される．また，条件 (H_6) と $(H_7)^*$，もしくは条件 $(H_6)^*$ と $(H_7)^*$ のもとでは定理1の (IV) が満足される．

これらの事実により次の結果が得られる．

定理2. 条件 (H_1) − (H_7) を仮定すると定理1の (I) が成立し，しかも各 $x \in C$ に対して次の収束が有界な $t \geqq 0$ について一様に成立する：

(i) $\lim_{n\to\infty} [T(\frac{t}{n})U(\frac{t}{n})]^n x = S(t)x, \quad t \geqq 0$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} [(I-\frac{t}{n}A)^{-1}U(\frac{t}{n})]^n x = S(t)x, \quad t \geqq 0$;

(iii) $\lim_{n\to\infty} [T(\frac{t}{n})(I-\frac{t}{n}B)^{-1}]^n x = S(t)x, \quad t \geqq 0$;

(iv) $\lim_{n\to\infty} [(I-\frac{t}{n}A)^{-1}(I-\frac{t}{n}B)^{-1}]^n x = S(t)x, \quad t \geqq 0.$

この定理は，補題2と定理1を考慮すれば，Miyadera－Kobayashi [8] あるいは Brezis－Pazy [1] の方法により証明される。

§4. 半群の収束

各 $\alpha > 0$ に対して $X_\alpha = \{x \in X ; p(x) \leqq \alpha\}$ とおく。さて，$\{A_k\}_{k\geqq 1}$ を X における線形閉作用素の列，$\{B_k\}_{k\geqq 1}$ を X における非線形作用素の列，$\{g_k\}_{k\geqq 1}$ を $[0,\infty)$ 上で定義された連続かつ非減少な非負値関数の列とし，以下の条件を考える：

$(H_1)^*$ 各 A_k は X 上のクラス (C_0) の線形縮小半群 $\{T_k(t) ; t \geqq 0\}$ の生成作用素である。

$(H_2)^*$ 各 $k \geqq 1$ と $\alpha > 0$ に対して $D(B_k) \cap X_\alpha$ は X の閉凸部分集合である。

$(H_3)^*$ 各 $k \geqq 1$ と $\alpha > 0$ に対して B_k は $D(B_k) \cap X_\alpha$ 上で連続である。

$(H_4)^*$ 各 $k \geqq 1$ と $\alpha > 0$ に対して k に依存しない実数 ω_α が存在し，$B_k - \omega_\alpha I$ は $D(B_k) \cap X_\alpha$ 上で消散的である。

$(H_5)^*$ 各 $k \geqq 1$ と $\alpha \geqq 0$ に対して，初期値問題

$$w'(t) = g_k(w(t)), \quad t > 0 ; \quad w(0) = \alpha$$

の $[0,\infty)$ 上での maximal solution $m_{g_k}(\cdot\, ; \alpha)$ が存在する。

$\{A_k\}$, $\{B_k\}$ そして $\{g_k\}$ はそれぞれ次の意味で A, B そして g に収束するものとする.

(H₈) $D(A) \subset \bigcap_{k\geq 1} D(A_k)$ であり，各 $x \in D(A)$ に対して $\lim_{k\to\infty} A_k x = Ax$ である.

(H₉) $C \subset \left(\bigcap_{k\geq 1} D(B_k)\right) \cap D(p)$ であり，各 $x \in C$ に対して $\lim_{k\to\infty} B_k x = Bx$ である。

(H₁₀) 各 $\xi \in [0,\infty)$ に対して $\lim_{k\to\infty} g_k(\xi) = g(\xi)$ である.

注意. 各 $\varepsilon > 0$ と $\alpha > 0$ に対して，$m_{g_k+\varepsilon}(\cdot\,;\alpha)$ を初期値問題

$$w'(t) = g_k(w(t)) + \varepsilon, \quad t > 0 \ ; \quad w(0) = \alpha$$

の $[0,\infty)$ 上の maximal solution とすると，Schechter [10] の結果により，条件 (H₁₀) のもとでは次が成立する：各 $\alpha \geqq 0$, $t \geqq 0$ 及び $\varepsilon > 0$ に対して

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\ m_{g_k+\varepsilon}(t\,;\alpha) \leqq m_{g+\varepsilon}(t\,;\alpha).$$

定理3. 条件 (H₁)−(H₅) を仮定し定理1の (I) が成立するものとする。また，条件 (H₁)*−(H₅)* を仮定し，各 $k\geqq 1$ に対して次を満足する $D(B_k)\cap D(p)$ 上の半群 $\{S_k(t)\,;\,t\geqq 0\}$ が存在するものとする：

$(\mathrm{i})_k$ $\displaystyle S_k(t)x = T_k(t)x + \int_0^t T_k(t-\tau)B_k S_k(\tau)x\,d\tau, \quad t\geqq 0,\ x\in D(B_k)\cap D(p);$

(ii)$_k$ $p(S_k(t)x) \leqq m_{g_k}(t; p(x))$, $t \geqq 0$, $x \in D(B_k) \cap D(p)$.

このとき，条件(H_8), (H_9), (H_{10})のもとでは，各$x \in C$に対して次の収束が有界な$t \geqq 0$について一様に成立する：

$$\lim_{k\to\infty} S_k(t)x = S(t)x, \quad t \geqq 0.$$

この定理は，定理2と同様に，Miyadera-Kobayashi [8] あるいはBrezis-Pazy [1] の方法により証明される。

注意． g及びg_kが非減少関数でない場合は，条件(H_{10})の代わりに次を仮定すれば定理3は成立する：

$(H_{10})^*$ $k\to\infty$のとき，g_kはgに$[0,\infty)$上で広義一様収束する．

参考文献

[1] H. Brezis and A. Pazy, Convergence and approximation of semigroups of nonlinear operators in Banach spaces, J. Funct. Anal., 9 (1972), 63-74.

[2] N. Kenmochi and T. Takahashi, Nonautonomous differential equations in Banach spaces, Nonlinear Analysis TMA, 4 (1980), 1109-1121.

[3] Y. Kobayashi, Difference approximation of Cauchy problems for quasi-dissipative operators and generation of nonlinear semigroups, J. Math. Soc. Japan, 27 (1975), 640–665.

[4] Y. Kobayashi, Differentiability of contractive semi-groups governed by semi-linear operators, preprint.

[5] V. Lakshmikantham and S. Leela, Differential and Integral Inequalities, Vol. 1., Academic Press, 1969.

[6] R. H. Martin, Jr., Invariant sets for perturbed semi-groups of linear operators, Ann. Mat. Pura Appl., 150 (1975), 221–239.

[7] R. H. Martin, Jr., Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces, Wiley-Interscience, 1976.

[8] I. Miyadera and Y. Kobayashi, Convergence and approximation of nonlinear semi-groups, Japan-France Seminar on Functional Analysis and Numerical Analysis, 1976.

[9] N. Pavel, Global existence for nonautonomous perturbed differential equations and flow-invariance, Preprint series in Mathematics, No. 22, Bucuresti 1981.

[10] E. Schechter, One-sided continuous dependence of maximal solutions, J. Differential Equations, 39 (1981), 413–425.