数理解析研究所講究録
第464巻 1982年 28-39

非線型Schrödinger方程式の外部問題の大域解について

東大 教養　　堤 誉志雄

§0. 序

次のような方程式を考える。

(0.1) $i\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u+\lambda|u|^{p}u \quad \text{in } \Omega\times(0,\infty)$

(0.2) $u(0,x)=u_0(x)$

(0.3) $u|_{\partial\Omega}=0$

ここで、λは実定数、pは2以上の偶数である。領域Ωは$\mathbb{R}^n$におけるコンパクト集合の外部で、境界$\partial\Omega$は滑らかであるとする。

$\Omega=\mathbb{R}^n$の場合は、色々な結果が報告されているが([2],[3],[4]参照)、Ωが外部領域の場合は、Brezis & Gallouet [1]の結果以外はないようである。彼らは、$n=2$ $p=2$の時、問題(0.1)—(0.3)が一意的な大域解を持つことを示した。ここでは、$n=3$, pが2以上の偶数の時でも、領

域Ωがある条件を満たし初期値が十分小さいなら、やはり問題(0.1)−(0.3)は一意的な大域解を持つことを示す。 $n \geq 4$の場合については最後の注意で述べる。

領域Ωについては、"Ωにおける波動方程式の基本解の特異性が十分時間がたてば無限遠方に飛んで行く"という条件を課す。 この条件は、いわゆる"non-trapping condition"で、以後これを条件[A]と呼ぶことにする。 この条件の正確な数学的表現については、Taylor [6], Morawetz, Ralston & Strauss [7], Melrose [8] を参照せよ。 具体的にはΩの補集合がconvexかstar-shapedなら良い。

我々の主定理は次のようなものである。

<u>定理 0.1.</u> 空間次元$n=3$とし、Pを$P \geq 2$なる偶数とする。 さらに、領域Ωが条件[A]を満たしていると仮定する。 その時、ある$\varepsilon>0$が存在して次の事が成立する。 すなわち、もし初期値$u_0(x)$が不等式

$$(0.4) \quad \sum_{|\alpha| \leq 12} \left\| \left(\tfrac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} u_0 \right\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{|\alpha| \leq 11} \left\| \left(\tfrac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} u_0 \right\|_{L^1(\Omega)} < \varepsilon$$

と適合条件を満たすなら、問題(0.1)−(0.3)は次のような一意解$u(t,x)$を持つ。 すなわち、

$$u(t,\cdot)\in\left\{\bigcap_{k=0}^{5}C^{k}([0,\infty);\mathring{H}^1(\Omega)\cap H^{2(6-k)}(\Omega))\right\}\cap C^{6}([0,\infty);L^2(\Omega)).$$

我々は、松村先生と西田先生が、圧縮性粘性流の方程式を解くのにつかった方法（[9] 参照）に従い、線型問題の Schrödinger方程式に対する decay 評価と energy 評価をつかって大域解の存在することを示す。

ここで、記号の定義をしておく。微分 $(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha$, $(\frac{\partial}{\partial t})^j$ は ∂_x^α, ∂_t^j と略記する。$\Omega\times[0,\infty)$ あるいは $\mathbb{R}^3\times[0,\infty)$ 上で定義された関数 $f(t,x)$ と、$1\leqq p\leqq\infty$、$k\geqq 0$、非負整数 L に対し

$$[f;(p,k,L)](t)=\sup_{s\in[0,t]}\sum_{|\alpha|+2j\leq L}(1+s)^{k}\|\partial_x^\alpha\partial_s^j f(s,\cdot)\|_{L^p(\Omega)}$$

$$[f;(p,k,L)]'(t)=\sup_{s\in[0,t]}\sum_{|\alpha|+2j\leq L}(1+s)^{k}\|\partial_x^\alpha\partial_s^j f(s,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}$$

と定義する。$R>0$ を $\partial\Omega\subset\{x\in\mathbb{R}^3;|x|<R\}$ となるような正定数として1つ固定しておく。$r>R$ に対して、$\Omega_r=\{x\in\Omega;|x|<r\}$ とし、$L^2_r(\Omega)=\{f(x)\in L^2(\Omega);f\equiv 0,|x|>r\}$ とする。また、以下の計算の途中に出てくる定数は単に C と書くことにする。

§1. 局所解の存在と一意性.

<u>定理1.1.</u>　Ωを$\mathbb{R}^3$のコンパクト集合の外部領域とし境界$\partial\Omega$は滑らかとする。　その時、任意の整数$N\geq 2$に対して、初期値$u_0(x)\in H^{2N}(\Omega)$で適合条件を満たすなら、問題(0.1)－(0.3)は次のような一意的な局所解を持つ。　すなわち

$$u(t,\cdot)\in\left\{\bigcap_{k=0}^{N-1}C^k([0,T];\mathring{H}^1(\Omega)\cap H^{2(N-k)}(\Omega))\right\}\cap C^N([0,T];L^2(\Omega)).$$

但し、Tは初期値$u_0(x)$の$H^2(\Omega)$ノルムの大きさのみによって決まる正定数である。

定理1.1は初め縮少写像の原理によって$C^1([0,T];L^2(\Omega))\cap C([0,T];\mathring{H}^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$のクラスで局所解を求める。　その後、その解の滑らかさを上げていき上のクラスの解を求める。

§2, decay 評価.

§2, §3 では次のような線型方程式を考える。

(2.1) $i\dfrac{\partial u}{\partial t}=\Delta u+f$　　in $\Omega\times[0,\infty)$

(2.2) $u(0,x)=u_0(x)$

(2.3) $u|_{\partial\Omega}=0$

fは以下で述べられる補題の中に現われるfについてのノルムが有界となるような滑らかな関数とする。

<u>命題2.1.</u>　空間次元$n=3$とし、領域Ωは条件[A]を満たすとする。その時、任意の非負整数Lに対して、問題(2.1)―(2.3)の解$u(t,x)$は次の評価を満たす。

$$
(2.4)\quad [u;(\infty,\tfrac{3}{2},2L)](t)
$$
$$
\le C\Big[\sum_{|\alpha|\le 2L+5}\|\partial_x^\alpha u_0\|_{L^1(\Omega)}+\sum_{|\alpha|\le 2L+7}\|\partial_x^\alpha u_0\|_{L^2(\Omega)}
$$
$$
+[f;(1,\tfrac{3}{2},2L+5)](t)+[f;(2,\tfrac{3}{2},2L+7)](t)\Big],\quad \forall t\geqq 0
$$

ここで、CはL，Ωだけに依存する正定数である。

命題2.1を証明するためには、以下のような補題が必要である。

<u>補題2.2.</u>　(i)　$u(t,x)$を次のようなCauchy問題の滑らかな解とする。

$$
(2.5)\quad i\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u\qquad \text{in } \mathbb{R}^3\times[0,\infty)
$$
$$
(2.6)\quad u(0,x)=u_0(x)
$$

その時、すべての非負整数Lに対して

(2.7) $[u;(\infty,\frac{3}{2},L)]'(t)$

$$\leq C\Big[\sum_{|\alpha|\leq L}\|\partial_x^\alpha u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}+\sum_{|\alpha|\leq L+2}\|\partial_x^\alpha u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\Big],\quad {}^\forall t\geqq 0$$

ここで、CはLだけに依存する正定数である。

(ii) $u(t,x)$ を次のようなCauchy問題の滑らかな解とする。

(2.8) $i\dfrac{\partial u}{\partial t}=\triangle u+f \quad \text{in } \mathbb{R}^3\times(0,\infty)$

(2.9) $u(0,x)=u_0(x)$

その時、任意の非負整数Lに対して、

(2.10) $[u;(\infty,\frac{3}{2},L)]'(t)$

$$\leq C\Big[\sum_{|\alpha|\leq L}\|\partial_x^\alpha u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}+\sum_{|\alpha|\leq L+2}\|\partial_x^\alpha u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

$$+[f;(1,\tfrac{3}{2},L)]'(t)+[f;(2,\tfrac{3}{2},L+2)]'(t)\Big],\quad {}^\forall t\geqq 0$$

ここで、CはLだけに依存する正定数である。

<u>補題2.3.</u>　空間次元$n=3$とする。領域Ωに対して条件[A]が満たされていると仮定する。$U(t)$によって、初期境界値問題

$$(2.11)\quad i\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u \qquad \text{in } \Omega\times[0,\infty)$$

$$(2.12)\quad u(0,x)=u_0(x)$$

$$(2.13)\quad u|_{\partial\Omega}=0$$

に対応する発展作用素を表わす。 a と b を $a,b>R$ なる正定数とする。 任意の $u_0(x)\in L^2_a(\Omega)$ に対して、

$$(2.14)\quad \|U(t)u_0\|_{L^2(\Omega_b)}\leqq Ct^{-\frac{3}{2}}\|u_0\|_{L^2(\Omega)},\quad \forall t\geqq 0$$

ここで、C は a, b, Ω だけに依存する正定数である。

問題 (2.1)−(2.3) の解を、境界 $\partial\Omega$ の付近では補題 2.3 によって評価し、境界から離れた所では補題 2.2 によって評価することにより、命題 2.1 を得る。

§3. energy 評価

<u>命題 3.1.</u> 領域 Ω を R^3 におけるコンパクト集合の外部とし、境界 $\partial\Omega$ は滑らかとする。 その時、任意の非負整数 L に対して、問題 (2.1)−(2.3) の解 $u(t,x)$ は次の評価を満たす。

$$(3.1)\quad [u;(2,0,2L)](t)\leqq C\Big[\sum_{|\alpha|\leqq 2L}\|\partial_x^\alpha u_0\|_{L^2(\Omega)}$$

$$+[f;(2,\tfrac{3}{2},2L)](t)] \quad , {}^{\forall}t \geqq 0$$

ここで、CはL, Ωだけに依存する正定数である。

問題(2.1)ー(2.3)の解$u(t)$は

$$(3.2) \quad u(t) = U(t)u_0 - i\int_0^t U(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

と表現できるので、これを評価すれば命題3.1が得られる。

§4. 定理0.1の証明.

定理1.1より局所解の存在することはすでにわかっているので、後はa priori評価を求めればよい。そのために、Matsumura & Nishida's methodをつかう。

定理1.1で与えられる局所解$u(t,x)$に対して次のように置く。

$$(4.1) \quad X(t) = [u;(2,0,12)](t)$$

$$(4.2) \quad Y(t) = [u;(\infty,\tfrac{3}{2},4)](t)$$

まず、命題3.1より

$$(4.3) \quad X(t) \leq C[E_1 + Y(t)^{p-1}[u;(\infty,0,6)](t)\cdot X(t)]$$

ここで、E_1は初期値のみに依存する正定数である。これは命題3.1を適用すると、

$$(4.4)\quad (1+t)^{\frac{3}{2}}\left\|(\partial_x^{\alpha_1}\partial_t^{j_1}u)(\partial_x^{\alpha_2}\partial_t^{j_2}u)\cdots(\partial_x^{\alpha_{\frac{p+2}{2}}}\partial_t^{j_{\frac{p+2}{2}}}u)(\partial_x^{\alpha_{\frac{p+4}{2}}}\partial_t^{j_{\frac{p+4}{2}}}\overline{u})\cdots(\partial_x^{\alpha_{p+1}}\partial_t^{j_{p+1}}\overline{u})\right\|_{L^2(\Omega)}$$

のような項がでてくる。但し、

$$(|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_{p+1}|)+2(j_1+\cdots+j_{p+1})\leq 12$$

で、$\overline{u}$はuの複素共役を表わす。一般性を失わずに、$|\alpha_1|+2j_1$が最大で、$|\alpha_2|+2j_2$が2番目に大きいと仮定して良い。その時、$|\alpha_2|+2j_2$は6を越えることはなく、$|\alpha_l|+2j_l$ ($l=3,4,\cdots p+1$) は4を越えることはないということを注意しておく。(4.4)で$\partial_x^{\alpha_1}\partial_t^{j_1}u$の項は$L^2(\Omega)$ノルムのまま残しておき、その他の項は$L^\infty(\Omega)$ノルムをとる。すると、(4.3)が得られる。Sobolevの埋蔵定理により、(4.3)は

$$(4.5)\quad X(t)\leq C[E_1+Y(t)^{p-1}X(t)^2],\quad \forall t\geq 0$$

となる。

次に命題2.1より、

$$(4.6)\quad Y(t)\leq C[E_2+Y(t)^{p-1}X(t)^2$$
$$+Y(t)^{p-1}[u;(\infty,0,6)](t)\cdot X(t)]$$

ここで、E_2は初期値のみによって決まる正定数である。こ

れは、命題2.1を適用すると、

$$(4.7)\quad (1+t)^{3/2}\left\|\left(\partial_x^{\alpha_1}\partial_t^{j_1}u\right)\left(\partial_x^{\alpha_2}\partial_t^{j_2}u\right)\cdots\left(\partial_x^{\alpha_{\frac{p+2}{2}}}\partial_t^{j_{\frac{p+2}{2}}}u\right)\left(\partial_x^{\alpha_{\frac{p+4}{2}}}\partial_t^{j_{\frac{p+4}{2}}}\bar{u}\right)\cdots\left(\partial_x^{\alpha_{p+1}}\partial_t^{j_{p+1}}\bar{u}\right)\right\|_{L^2(\Omega)}$$

$$(4.8)\quad (1+t)^{3/2}\left\|\left(\partial_x^{\alpha_1}\partial_t^{j_1}u\right)\left(\partial_x^{\alpha_2}\partial_t^{j_2}u\right)\cdots\left(\partial_x^{\alpha_{\frac{p+2}{2}}}\partial_t^{j_{\frac{p+2}{2}}}u\right)\left(\partial_x^{\alpha_{\frac{p+4}{2}}}\partial_t^{j_{\frac{p+4}{2}}}\bar{u}\right)\cdots\left(\partial_x^{\alpha_{p+1}}\partial_t^{j_{p+1}}\bar{u}\right)\right\|_{L^1(\Omega)}$$

のような項が現われる。　但し、(4.7) では

$$(|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_{p+1}|)+2(j_1+\cdots+j_{p+1})\leq 11$$

で、(4.8) では

$$(|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_{p+1}|)+2(j_1+\cdots+j_{p+1})\leq 9$$

である。　前と同じように、一般性を失わずに、$|\alpha_1|+2j_1$ が最大で $|\alpha_2|+2j_2$ が2番目に大きいとする。　その時、$|\alpha_2|+2j_2$ は、(4.7)では5を、(4.8)では4を越えることはなく、$|\alpha_l|+2j_l$ ($l=3,4,\cdots,p+1$) は (4.7)、(4.8) ともに4を越えることはないということを注意しておく。　(4.7)では、$\partial_x^{\alpha_1}\partial_t^{j_1}u$ を $L^2(\Omega)$ ノルムのまま残しておき、他の項は $L^\infty(\Omega)$ ノルムをとる。　(4.8)では、$\partial_x^{\alpha_1}\partial_t^{j_1}u$ と $\partial_x^{\alpha_2}\partial_t^{j_2}u$ に対して、Schwarzの不等式で $L^2(\Omega)$ とし、他の項は $L^\infty(\Omega)$ ノルムをとる。　すると、(4.6) を得る。　Sobolevの埋蔵定理により、(4.6) は

$$(4.9)\quad Y(t)\leq C[E_2+Y(t)^{p-1}X(t)^2]\quad ,\ \forall t\geq 0$$

となる。　E_1 と E_2 は、初期値を十分小さくとることにより、

いくらでも小さくできる。故に、(4.5)と(4.9)は、初期値が十分小さいなら、$X(t)$はすべての時間$t \geqq 0$に対して有界でなければならないということを示している。従って、大域解の存在が示せた。

<u>注意</u>　上では、$n=3$の場合を示したが、ほとんどの定理と補題は$n \geqq 4$の場合にも成立する。$n \geqq 4$の場合の最終的な結果は現在研究中である。

〔参考文献〕

〔1〕 H. Brezis and T. Gallouet, Nonlinear Analysis, <u>4</u> (4), 677-681 (1980)

〔2〕 J. B. Baillon, T. Cazenave and M. Figueira, C.R. Acad. Sci., Paris, <u>284</u>, 869-872 (1977).

〔3〕 J. Ginibre and G. Velo, J. Functional Analysis, <u>32</u>, 1-32, 33-71 (1979).

[4] R.T. Glassey, J. math. Phys., **18**, 1794–1797 (1977).

[5] B.R. Vainberg, Russian Math. Surveys, **30:2**, 1–58 (1975).

[6] M.E. Taylor, Comm. Pure Appl. Math., **29**, 1–38 (1976).

[7] C.S. Morawetz, J.V. Ralston, and W.A. Strauss, Comm. Pure Appl. Math., **30**, 447–508 (1977).

[8] R.B. Melrose, Duke Math. Journal, **46** (1), 43–59 (1979).

[9] A. Matsumura and T. Nishida, Proc. Japan Acad., **55**, Ser. A, 337–342 (1979).