数理解析研究所講究録
第465巻1982年1-6

可約指数について——鈴木氏の話へのintroduction

愛媛大 理　　青山陽一

このノートでは，可約指数に関し筆者が興味を感じたことについて記し，鈴木氏の話へのintroductionとしたい。時代順に論文をピックアップして書いていくが，関係のある論文をすべてリストアップしたものではない。以下，Aは極大イデアル$\mathfrak{m}$を持つd次元のネーター局所環であるとする。$\mathfrak{q}$を$\mathfrak{m}$-準素イデアル，$\mathfrak{q}=\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_t$を既約イデアルによる無駄のない分解とするとき，$t$は分解の仕方によらないこと，及び$t=\ell(\mathfrak{q}:\mathfrak{m}/\mathfrak{q})=\dim_{A/\mathfrak{m}}\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m},A/\mathfrak{q})$であることが知られている。([1, Satz IV]　なお[3]も参照)

[1] E. Noether, Idealtheorie in Ringbereichen, Math. Ann. 83 (1921) 24 - 66.

この不変量tを$\mathfrak{q}$の可約指数と呼び，$ir(\mathfrak{q})$或いは$N(\mathfrak{q})$で示す。([3, Definition 2])　Gröbnerは“Aがregularのとき，任意のparameter ideal (= s.o.p. で生成されたideal) は既約である”を示

した。(彼の定理の元の形を現在の用語で書くと，"R を Cohen-Macaulay 整域，$\mathfrak{a}$ を principal ideal class (i.e. $\mathrm{Rt}\,\mathfrak{a} = \nu(\mathfrak{a})$ = 極小生成系の個数)，$\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{a}$ の素因子で $R_{\mathfrak{p}}$ が regular なるものとすると，$\mathfrak{a}$ の $\mathfrak{p}$-準素成分は既約")　([2, Satz])

[2] W. Gröbner, Ein Irreduzibilitätskriterium für Primärideale in kommutativen Ringen, Monatsh. Math. 55(1951) 138 - 145.

Northcott は上の結果を次の様に拡張した。"A が Cohen-Macaulay のとき，parameter ideal の可約指数は s.o.p. のとり方に依らない A の不変量である。"　([3, Theorem 3])

[3] D. G. Northcott, On irreducible ideals in local rings, J. London Math. Soc. 32(1957) 82 - 88.

ここで鈴木敏氏(京大・教養)より教えてもらった(1975夏)証明法を書いておこう。まず2つ補題を用意する。(証明は略す)

Lemma 1 (S. Suzuki). R を環，M を R-加群 ($\neq 0$)，$M \supset (0) = N_1 \cap \cdots \cap N_t$ を既約部分加群 ($\neq M$) による分解とするとき，次は同値：

(a)　$M \xrightarrow{nat.} M/N_1 \oplus \cdots \oplus M/N_t$ が essential monomorphism である。

(b)　分解に無駄がない。

Lemma 2 (?).　R を環，M を R-加群 ($\neq 0$)，N を M の essential 部分加群，$M \supset (0) = Q_1 \cap \cdots \cap Q_t$ を無駄のない既約分解とすると，$Q_i' = Q_i \cap N$ は N の既約部分加群で，$N \supset (0) = Q_1' \cap \cdots \cap Q_t'$ は無駄のない既約分解である。

(Proof of [3, Theorem 3]) dに関する帰納法。$d=0$のとき，$0:\mathfrak{m}\subsetneq A$はessentialだからLemma 2よりベクトル空間の話になる。
$d=1$のとき。x, yを非零因子とする。$A/(y)\underset{x}{\cong}(x)/(xy)\hookrightarrow A/(xy)$がessentialであることを示し，Lemma 2を使い$ir(y)=ir(xy)=ir(x)$を得る。$d>1$，$d-1$まで正しいとする。$x_1,\dots,x_d$，$y_1,\dots,y_d$を各々s.o.p.とする。$\exists z$ s.t. $x_1,\dots,x_{d-1},z$，$y_1,\dots,y_{d-1},z$が各々s.o.p.だから帰納法により主張を得る。(by S. Suzuki)　(q.e.d.)
更にNorthcott-Reesは次の興味ある定理を証明した。"任意のparameter idealが既約ならば，Cohen-Macaulayである。"([4, Theorem 1])

[4] D. G. Northcott & D. Rees, Principal systems, Quart. J. Math. Oxford (2) 8(1957) 119 - 127.

ここで，下田の補題を使う山岸氏の証明を紹介しよう。
Lemma (Shimoda). $a(\neq 0)\in\mathfrak{m}$で，$0:a=0:a^2$とする。(a^2)が既約ならば，aは非零因子である。
(Proof of [4, Theorem 1]) $a_1,\dots,a_t$をsub s.o.p.とする。任意の$e_1,\dots,e_t$に対し$(a_1^{e_1},\dots,a_t^{e_t})$が既約ならば$a_1,\dots,a_t$はregular sequenceを示せばよい。$t$に関する帰納法。$t=1$のときは上のLemmaによる。$t>1$，$t-1$まで正しいとする。$B=A/(a_2^e,\dots,a_t^e)$とおく。$a_1^fB$は既約 for $\forall f>0$だからa_1はB-regular。$0:a_1=\bigcap_{e>0}(a_2^e,\dots,a_t^e):a_1=\bigcap_{e>0}(a_2^e,\dots,a_t^{e_t})=0$より$a_1$は$A$-regular。$A/(a_1)$で考えて帰納法により主張を得る。(by Yamagishi)　(q.e.d.)

Bergerは1次元Gorenstein局所環（彼の用語ではunvergabelt）の研究を行ない，その中で“1次元Cohen-Macaulay局所環で極大イデアルが2個の元で生成されるものはGorensteinである”を示し，その様な局所環を分類した。([5, Satz 2 & Satz 4])

[5] R. Berger, Über eine Klasse unvergabelter lokaler Ringe, Math. Ann. 146(1962) 98 - 102.

Endo-NaritaはBergerの結果を次の様に拡張した。“Aのparameter idealの可約指数がs.o.p.のとり方によらないAの不変量で，それが$d+1$個の元で生成されるならば，AはGorensteinである”更に，“Cohen-Macaulayでなくて，parameter idealの可約指数がs.o.p.のとり方に依らない局所環が存在する”ことを示した。([6, Theorem 1 & Theorem 2])

[6] S. Endo & M. Narita, The number of irreducible components of an ideal and the semi-regularity of a local ring, Proc. Japan Acad. 40(1964) 627 - 630.

今まで述べてきたようなところから，可約指数の概念は重要なものであろうと思われるし，（事実，Cohen-Macaulay環の場合には重要な役割を持ち，その理論が作られている）　その役割はどうなのであろうかという想いがする。Cohen-Macaulayでなくてparameter idealの可約指数がs.o.p.のとり方に依らない局所環は存在するし，またparameter idealの可約指数がs.o.p.を

動かしたときに有界でないような局所環も存在する。そこでまず，可約指数一定の局所環，或いは可約指数有界の局所環は，どの様なものであろうかと云う疑問が湧く。そして，その様な場合に他の不変量との関係はどうかとか。そして更には..........

何かしら訳の判らない，まとまりのないものを書いてきてしまったが，最後に文献を補足して，このノートを終ることにしたい。

[7] H. Bass, On the ubiquity of Gorenstein rings, Math. Z. 82 (1963) 8 - 28.

[8] G. Eisenreich, Zur Syzygientheorie und Theorie des inversen Systems perfekter Ideale und Vektormoduln in Polynomringen und Stellenringen, S.-B. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Nat. Kl. Band 109 Heft 3, Akademie Verlag, 1970.

[9] W. Gröbner, Über irreducible Ideale in kommutativen Ringen, Math. Ann. 110(1934) 197 - 222.

[10] W. Gröbner, Moderne algebraische Geometrie, Wien-Innsbruck 1949.

[11] W. Krull, Idealtheorie (zweite, erganzte Auflage), Ergeb. Math. Grenz. 46, Springer Verlag, 1968.

[12] F. S. Macaulay, The algebraic theory of modular systems,

Camb. Univ. Press, 1916.

[13] H. Seydi, Une remarque sur les anneaux de Cohen-Macaulay, Bull. Sc. Math. (2) 96(1972) 155 - 160.