数理解析研究所講究録
第467巻 1982年 56-63

$S^3\times[0,1)$ のコンパクト化についての注意

東大・理　久我 健一

(Ken'ichi Kuga)

このノートでは、Π^4 は、次の(i)，(ii)を満たす位相的／可微分，コンパクト4次元多様体を表わす。

(i)　$\partial\Pi^4 = S_0^3 \sqcup \Sigma_1^3$（2成分）で、$S_0^3 \approx S^3$

(ii)　位相同型 $S^3\times[0,1) \xrightarrow[\approx]{\varphi} \Pi^4 \setminus \Sigma_1^3$ が存在する。

かかる Π^4 が、$S^3\times[0,1]$ に限るかどうかは、以下で判る通り難しい問題である。ここでは、上の(ii)の位相同型 φ が一定の性質（定義1）を満たすようにとれるか、という問題が、他の2,3の問題と、密接に関連していることを注意したい。

<u>定義1</u>　Π^4 が、リプシッツ（or 部分的リプシッツ）とは、上の(ii)の φ として、次を満足するものが、とれるときをいう。：Π^4 の距離 δ（resp. δと、さらに、ある $z\in\Sigma_1^3$ の Π^4 における近傍 O）があって、(x,y) が、$x\neq y,\in S^3\times[0,1)$（resp. $x\neq y,\in\varphi^{-1}(O)$）を動くときの

$$\sup(\delta(\varphi(x), \varphi(y))/d(x, y)) < \infty$$

となること。ただしここに、d は、$S^3 \times [0,1)$ を 単位3-球面 $\times [0,1) \subset \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}$ と思った時の、$\mathbb{R}^5$ の標準的距離 $\left(\sum_{i=1}^{5}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2}$ から導かれるものとする。//

<u>注意</u> $\Pi^4 = S^3 \times [0,1]$ は、明らかに、この意味で、リプシッツである。

<u>定理1</u> 次は同値

(a) $\mathbb{R}^4$ に、局所平坦に、位相的埋蔵可能な、任意の位相的 Π^4 with $\Sigma_1^3 \approx S^3$ は部分的リプシッツ

(b) 全ての位相的 Π^4 with $\Sigma_1^3 \approx S^3$ は、$\Pi^4 \approx S^3 \times [0,1]$

(c) 4次元アニュラス予想は真 //

<u>定理2</u> 次において (a) $\Rightarrow$ (b) $\rightleftarrows$ (c)

(a) 全ての可微分 Π^4 はリプシッツ

(b) 全ての可微分 Π^4 に対し $\Sigma_1^3 \approx S^3$

(c) 3次元ポアンカレー予想は真 //

上への写像 $f : S^n \to S^n$ が、pseudo-isotopy $\{f_t\}$, $0 \le t \le 1$, ($0 \le t < 1$ に対して $f_t : S^n \approx S^n$) があって $f = f_1$ となるとき、(以下、ABH と書く)

補題1 $M_f \approx S^n \times [0,1]$, ここに M_f は写像柱。

この逆として 問題 $M(4)$: $M_f \approx S^4 \times [0,1] \Rightarrow f$ は ABH か？ が考えられる。これについては

定理3 $M(4) \Leftrightarrow$ 全ての CE 写像 $f : S^4 \to S^4$ は ABH。

注意 $n \neq 4$ については全ての CE 写像 $S^n \to S^n$ は ABH である（[Ar], [Si]）。$n = 4$ について知られていることは [Fr] の Theorem 9.1 ..

証明

補題1の証 : 下において h は well-defined bijective

$$\begin{tikzcd} & S^n \times [0,1] \arrow[dl, "\text{quotient map}"'] \arrow[dr, "\text{pseudo-isotopy } f_t \times t"] & \\ M_f \arrow[rr, "h"] & & S^n \times [0,1] \end{tikzcd}$$

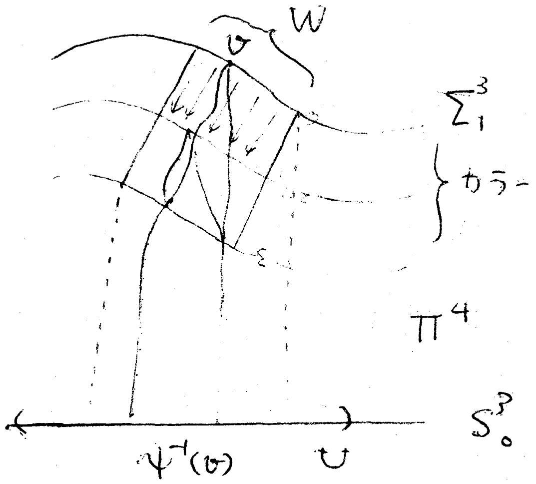
continuous. $S^n \times [0,1]$ の Hausdorff 性から bicontinuous。

補題2 位相的 Π^4 を部分リプシッツ, δ, ε, O, φ を定義1におけるものとする。このとき、その Σ_1^3 における十分小さい近傍 $V \subset \Sigma_1^3$ に対して relation

$$S^3 \ni u \overset{\Psi}{\longmapsto} \lim_{t \uparrow 1} \varphi(u,t) \equiv \Sigma_1^3 \cap Cl_{\Pi^4}\varphi(u,[0,1)) \subset \Sigma_1^3$$

は、V の上で well-defined CE 写像 $\Psi| : \Psi^{-1}(V) \to V$ を定める。

補題2の証　リプシッツ性の仮定が、十分小さなVに対して、$\lim_{t\uparrow 1}\Psi(u,t)\in V$ の収束性と、$\psi|\Psi^{-1}(V)$ の連続性を保証する。各 $v\in V$ に対して、$\Psi^{-1}(v)\subset S_0^3$ が cell-like であることを示せばいい。近傍 $\Psi^{-1}(v)\subset U\subset S_0^3$ に対し右図の様に、Σ_1^3 のカラーに沿って開集合 $W\times(0,\varepsilon)$ を十分小さくとれば、リプシッツ性の仮定から $\Psi(S^3\times[0,1))$ による積構造に関する $\Psi(S^3\times 0)=S_0^3$ への projection (of $W\times(0,\varepsilon)$) は、Uの中に入る。さらにεを小さくとっておけば、$\psi|\Psi^{-1}(v)$ の写像柱 (in Π^4) は、$(\Sigma_1^3\setminus W)\times[0,\varepsilon)$ カラーとは、交わらないとしてよい。このとき、Σ_1^3 のカラーにおいて、$[0,\varepsilon)$ を $[1/2\varepsilon,\varepsilon)$ に縮める変形を考えれば、これによって、$\psi|\Psi^{-1}(v)$ の写像柱が $\Pi^4\setminus\Sigma_1^3$ に入る。$\Psi(S^3\times[0,1))$ による積で $\Psi(S^3\times 0)=S_0^3$ に（この写像柱を）おとせば、これは、Uにおける $\Psi^{-1}(v)$ の null-homotopy を与える。cell-like 分解写像 $\psi^{-1}(V)\to V$ の upper semi-continuity は V の Hausdorff 性から自動的に従う。//



定理1の証

((a) ⇒ (c))：$S^4\supset S_0^3\sqcup S_1^3$ を局所平坦に埋込ま

れた、2つのdisjoint 3-球面とする。この2つによって挟まれた部分の閉包を Π^4 とおく。$\Pi^4 \setminus S^3_1 \approx S^3 \times [0.1)$ である。実際、BrownのSchoenflies定理の証明[Br]から S^3_1 によって囲まれる S^3_0 と反対側の部分の閉包はcellular 4-球体 $D^4_1 \subset S^4$ であるから、

$$\Pi^4 \setminus S^3_1 \underset{(\text{cellularity of } D^4)}{\approx} (\Pi^4 \cup D^4_1) \setminus pt \underset{(\text{Schoenflies})}{\approx} D^4 \setminus pt$$

従って(a)を仮定すると、補題2から Π^4 の中に、十分小さな閉3球体 $\mathring{D}^3 \subset S^3_1$ の上へのCE写像 $S^3_0 \supset \Psi^{-1}(\mathring{D}^3) \xrightarrow{\Psi|} \mathring{D}^3 \subset S^3_1$ の写像柱 $M_{\Psi|}$ が埋込まれている。ところが[Ar]から $\Psi|$ はABHになるので、補題1の証明と同様にして、この写像柱は、$\mathring{D}^3 \times [0.1] \subset \Pi^4$, $\mathring{D}^3 \times 0 \subset S^3_0$, $\mathring{D}^3 \times 1 = \mathring{D}^3 \subset S^3_1$, に他ならない。そこで[Ki1]と同様に、$S^4$ 中の局所平坦3-球面 $(S^3_0 \setminus \frac{1}{2}D^3 \times 0) \cup (\partial \frac{1}{2}D^3 \times [0.1]) \cup (S^3_1 \setminus \frac{1}{2}D^3 \times 1)$ を考えると、Schoenflies定理から

$\Pi^4 \setminus (\frac{1}{2}\mathring{D}^3 \times [0.1]_{\text{写像柱}})$ は4-球体となり、再び $(\frac{1}{2}D^3 \times [0.1])_{\text{写像柱}}$ を埋めれば、位相同型 $\Pi^4 \approx S^3 \times [0.1]$ をうる //

((c) ⇒ (b)):全ての位相的 Π^4 with $\Sigma^3_1 \approx S^3$ に対し $D^4_0 \underset{S^3_0}{\cup} \Pi^4 \underset{\Sigma^3_1}{\cup} D^4_1$ はホモトピー4-球面であり[Fr]からこれは、S^4 に位相同型、従って $\Pi^4 \approx S^3 \times [0.1]$ //

（(b) ⇒ (a)）は自明 //

定理２の Ⓟ

（(a) ⇒ (b)） 補題２の証明から、Σ^3_1 は、S^3_0 の CE 分解空間になるが、[Ar] から、これは shrinkable (ABH) とくに $\Sigma^3_1 \approx S^3_0 \approx S^3$ //

（(b) ⇒ (c)） Σ^3 をホモトピー３－球面とする。$\Delta^4 \equiv (\Sigma^3 \setminus \mathrm{Int}\, D^3) \times [0,1]$ とおくと、Δ^4 は可微分コンパクト可縮４－多様体で、$\partial\Delta = \Sigma \# (-\Sigma)$、ここで $\Pi^4 \equiv \Delta^4 \setminus \mathrm{Int}\, D^4$ とおけば、$\Pi^4 \setminus (\Sigma \# (-\Sigma)) \approx S^3 \times [0,1)$

実際 $\Delta^4 \underset{(\Sigma\#-\Sigma)}{\cup} (-\Delta)^4$ を考えると、これはホモトピー４－球面で、[Fr] から $\approx S^4$、この中で $(-\Delta^4)$ はホモトピー３球面 $\Sigma \# -\Sigma$ のカラーを用いれば、cellularity criterion を満たしている cell-like set である。従って [Fr] Theorem 1.11 から cellular.（４次元 cellularity criterion）よって

$$\Pi^4 \setminus (\Sigma \# -\Sigma) \underset{(\text{cellularity of } -\Delta^4)}{\approx} \Pi^4 \cup (-\Delta^4) \setminus pt \underset{(\text{Schoenflies})}{\approx} D^4 \setminus pt$$

従って (b) から $\Sigma \# (-\Sigma) \approx S^3$、ここで連結和 # の $S^2 \subset S^3$ は bicollard であるから Schoenflies 定理から $\Sigma \setminus \mathrm{Int}\, D^3 \approx D^3$　∴ $\Sigma = D^3 \underset{S^2}{\cup} D^3 \approx S^3$ //

（(c) ⇒ (b)） Σ^3_1 は常にホモトピー３－球面である。

実際、Σ_1^3 中の loop はまず Σ_1^3 のカラーで Π^4 の内部に入れると、$\Pi^4 \setminus \Sigma_1^3$ の中に null-homotopy をもつ。これは $\Pi^4 \setminus \Sigma^3 \approx S^3 \times [0,1)$ を使えば、Σ_1^3 のカラーの中に入っているとしてよい。これを再びカラーを使って Σ_1^3 へ project すれば、これがもとの loop の Σ_1^3 における null-homotopy となっている。従って (c) を仮定すれば $\Sigma_1^3 \approx S^3$ //

<u>定理3の⑥</u>　CE 写像 $f: S^4 \to S^4$ が定める cell-like 分解 (of S^4) を D_f とおく ($D_f = \{f^{-1}pt\}$)。$S^5 = \Sigma S^4$ (suspension) と思い、suspension level を $[-2, 2]$ で表わす。S^5 の cell-like 分解 $\Sigma D_f = \{f^{-1}pt \times t \ \ -2<t<2,\ \text{susp. pts}\}$ は [Ca] [Ed] から ~~ABH~~ shrinkable また saturated open set $S^5 \supset S^4 \times [-2, 1)$ への ΣD_f の制限も ~~ABH~~ shrinkable だから

$$\begin{tikzcd}
 & S^5 \arrow[r, "ABH", "p_1"'] \arrow[dl, "ABH"', "p_0"] & S^5/\Sigma D_f \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] \\
S^5/\Sigma D_f | S^4 \times [-2,1) \approx S^5_0 \arrow[rr, "\pi"'] & & S^5_1
\end{tikzcd}$$

ここで π は残りの ΣD_f の元をつぶす写像，π によって S^5_0 中の $S^4 \times [-1, 1]$ は S^5_1 に埋込まれた f の写像柱に写像されている：$\pi(S^4 \times [-1, 1]) = M_f \subset S^5_1$ 。この M_f は S^5_1 中の局所平坦な2つの S^4 によって挟まれている。実際 $\pi(S^4 \times -1) \subset S^5_1$ が局所平坦なことは自明。$\pi(S^4 \times +1) \subset S^5_1$ については、$\pi(S^4 \times +1) = p_1(S^4 \times +1)$ だが S^5 から

が p_1 の像と思うと $S^4 \times (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) / D_f \times (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$

$= (S^4/D_f) \times (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) = S^4 \times (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ ($\because \mathrm{Im} f = S^4$)

によって bicollared になる．従って Annulus 定理 [Ki 2]

から $M_f \approx S^4 \times [0,1]$，従って $M(4)$ を仮定すれば f は ABH //

参照文献

[Ar] S. Armentrout, Cellular decompositions of 3-manifolds that yield 3-manifolds Memoirs A.M.S. 107 (1970)

[Br] M. Brown, A proof of the generalized Schoenflies theorem Bull. A.M.S. 66 (1960) 74-76

[Ca] J. Cannon, Shrinking cell-like decompositions of manifolds. Codimension three. Ann. Math 110 (1979) 83-112

[Ed] R. Edwards, Approximating certain cell-like maps by homeomorphisms (preprint. 1977)

[Fr] M. Freedman, The topology of four-dimensional manifolds, preprint (1982)

[Ki 1] R. Kirby On the annulus conjecture PAMS 1965

[Ki 2] ______, Stable homeomorphisms and the annulus conjecture. Ann. Math ~~(2) 77~~ 1969

[Si] L. Siebenmann, Approximating cellular maps by homeomorphisms, Topology 11 (1972), 271-294