数理解析研究所講究録
第 471 巻 1982 年 110-116

Multipartite Doubles Designs

新居浜高専　　潮　和彦
(Ushio Kazuhiko)

1. Multipartite Doubles Designs(MDD)

n 人ずつの選手からなるチームが m チーム集まって，ダブルスによるテニスの試合をする。どの選手も，他のチームの選手とは λ 回ずつ敵対し，自分のチームの選手とは敵対しないようなダブルス試合の組合せを Multipartite Doubles Design（MDD）とよび，MDD(m,n,λ) と書く（$m \geqq 2$, $n \geqq 1$, $\lambda \geqq 1$）。

選手を点に，選手間の敵対を線に対応させれば，MDD(m,n,λ) は，グラフ理論の言葉で言えば，mn 個の点と $\lambda\binom{m}{2}n^2$ 本の線からなる完全 m 組グラフ $\lambda_m K_n$ を，互いに線を共有しないように，4個の点と4本の線からなる完全2組グラフ $K_{2,2}$ の和に分解すること（$K_{2,2}$ 分解）であるということができる。

MDD(m,n,λ) が存在するための必要十分条件について述べる。

2. MDD 定理

パラメータ m, n, λ に対して，$MDD(m, n, \lambda)$ が存在するための必要十分条件について，次の定理が成り立つ。

定理1. $^{\exists}MDD(m, n, \lambda)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & \lambda m(m-1)n^2 \equiv 0 \pmod 8 \\ \text{(ii)} & \lambda(m-1)n \equiv 0 \pmod 2 \\ \text{(iii)} & mn \geqq 4 . \end{cases}$$

2.1 定理1の必要性の証明

パラメータ m, n, λ をもつ $MDD(m, n, \lambda)$ が存在したとする。このとき，mn 人の選手間には $\lambda\binom{m}{2}n^2$ 個の敵対があり，1試合当り4個の敵対が消化されるから

$$\text{(i)} \quad \lambda m(m-1)n^2 \equiv 0 \pmod 8$$

である。さらに，どの選手も他のチームの $(m-1)n$ 人の選手の各々と λ 回ずつの敵対があり，1試合に彼は2人の選手と敵対するから

$$\text{(ii)} \quad \lambda(m-1)n \equiv 0 \pmod 2$$

である。また，1試合には4人の選手が登場するから

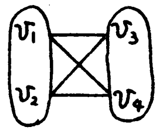
$$\text{(iii)} \quad mn \geqq 4$$

である。従って，条件 (i)(ii)(iii) が必要である。

2.2 $K_{2,2}$ 分解

選手 v_1, v_2 が一方のパートナー（ペア）となり，選手 v_3, v_4 がもう一方のパートナー（ペア）となるとき，この4人によ

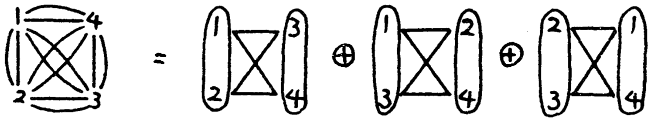
るダブルスの試合を

$K_{2,2}$ = 

と表わす。$K_{2,2}$ 分解に関して，次の lemma が成り立つ。

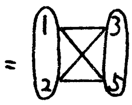
<u>Lemma 1</u>. $2K_4 \longrightarrow K_{2,2}$

（証明）$V = \{1, 2, 3, 4\}$ とおく。

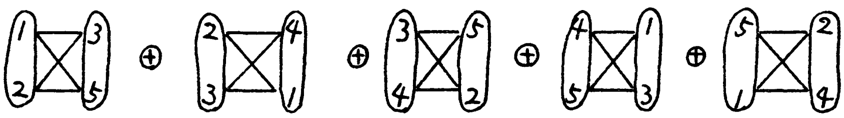
$2K_4$ = 

$= K_{2,2} \oplus K_{2,2} \oplus K_{2,2}$

<u>Lemma 2</u>. $2K_5 \longrightarrow K_{2,2}$

（証明）$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とおく。base block $K_{2,2}$ = 

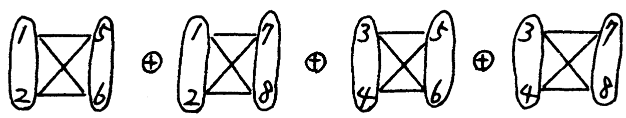
を4回 turning すれば

$2K_5$ = 

が得られる。

<u>Lemma 3</u>. $K_{4,4} \longrightarrow K_{2,2}$

（証明）$V_1 = \{1, 2, 3, 4\}$，$V_2 = \{5, 6, 7, 8\}$ とおく。V_1 から2組のペア (1,2)，(3,4) を用意し，V_2 から2組のペア (5,6)，(7,8) を用意し，ペア同志の対抗試合を異なったチーム間で行なえば

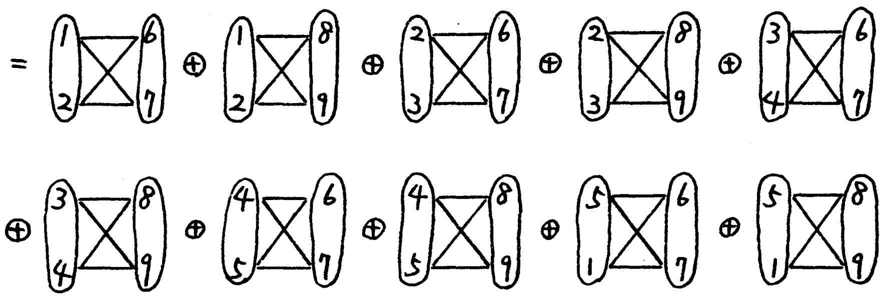
$K_{4,4}$ = 

が得られる。

Lemma4. $2K_{5,4} \longrightarrow K_{2,2}$

（証明）$V_1=\{1,2,3,4,5\}$，$V_2=\{6,7,8,9\}$ とおく。V_1から５組のペア $(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,1)$ を用意し，V_2から２組のペア $(6,7),(8,9)$ を用意し，ペア同志の対抗試合を異なったチーム間で行なえば

$2K_{5,4} =$



が得られる。

2.3 MDDの拡張lemma

MDDに関して，次の拡張lemmaが成り立つ。

Lemma5. ${}^\exists MDD(m,n,\lambda) \Rightarrow {}^\exists MDD(m,\alpha n,\lambda)$

（証明）$V_i=\{i_1,i_2,\cdots,i_{\alpha n}\}$ $(i=1,2,\cdots,m)$ とおく。各チームに対して，α人ずつの組をn組 $(i_1,i_2,\cdots,i_\alpha),(i_{\alpha+1},i_{\alpha+2},\cdots,i_{2\alpha}),\cdots,(i_{\alpha n-\alpha+1},i_{\alpha n-\alpha+2},\cdots,i_{\alpha n})$ 用意する。$\lambda_m K_n \longrightarrow K_{2,2}$ より，このα人ずつの組を１つの点とみなせば，$\lambda_m K_{\alpha n} \longrightarrow K_{2\alpha,2\alpha}$ が得られる。Lemma3と同様にして，$K_{2\alpha,2\alpha} \longrightarrow K_{2,2}$ が成り立つ。従って，$\lambda_m K_{\alpha n} \longrightarrow K_{2,2}$ が得られる。

Lemma6. ${}^\exists MDD(m,n,\lambda) \Rightarrow {}^\exists MDD(m,n,\alpha\lambda)$

（証明） $MDD(m,n,\lambda)$ の $b=\lambda m(m-1)n^2/8$ 個の試合を α 回ずつくりかえせば，$MDD(m,n,\alpha\lambda)$ が得られる。

2.4 定理1の十分性の証明

定理1の必要条件(i)(ii)(iii)は，また，十分条件でもあることを証明する。(i)(ii)(iii)をみたすパラメータ m, n, λ は，

① n : even

② n : odd, λ : odd, $m\equiv 1 \pmod 8$

③ n : odd, $\lambda\equiv 0 \pmod 4$, $mn\geqq 4$

④ n : odd, $\lambda\equiv 2 \pmod 4$, $m\equiv 0$ or $1 \pmod 4$

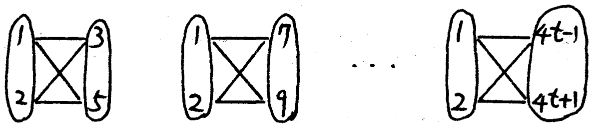
の4通りに分類される。MDDに関して，次のlemmaが成り立つ。

<u>Lemma 7</u>. n : even $\Rightarrow$ ${}^{\exists}MDD(m,n,\lambda=1)$

（証明） $V_i=\{i_1,i_2,\cdots,i_n\}$ $(i=1,2,\cdots,m)$ とおく。各チームに対して，$\frac{n}{2}$ 組のペア $(i_1,i_2),(i_3,i_4),\cdots,(i_{n-1},i_n)$ を用意して，ペア同志の対抗試合を異なったチーム間で行なえば，$MDD(m,n,\lambda=1)$ が得られる。

<u>Lemma 8</u>. $m\equiv 1 \pmod 8$ $\Rightarrow$ ${}^{\exists}MDD(m,n=1,\lambda=1)$

（証明） $m=8t+1$ $(t\geqq 1)$ とおく。$V=\{1,2,\cdots,8t+1\}$ に対して，t 個の base block



の各々を $m-1$ 回 turning すれば，$MDD(m,n=1,\lambda=1)$ が得られる。

Lemma 9. $\lambda=4,\ mn\geqq 4 \Rightarrow {}^{\exists}MDD(m,n,\lambda=4)$

（証明） $V_i=\{i_1,i_2,\cdots,i_n\}\ (i=1,2,\cdots,m)$ とおく。各チームに対して、n 組のペア $(i_1,i_2),(i_2,i_3),\cdots,(i_n,i_1)$ を用意して、ペア同志の対抗試合を異なったチーム間で行なえば、$MDD(m,n,\lambda=4)$ が得られる。

Lemma 10. $\lambda=2,\ m\equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow {}^{\exists}MDD(m,n=1,\lambda=2)$

（証明） $m=4t\ (t\geqq 1)$ とおく。$V=\{1,2,\cdots,4t\}$ に対して、4人ずつの組を t 組 $(1,2,3,4),(5,6,7,8),\cdots,(4t-3,4t-2,4t-1,4t)$ 用意する。

$$2K_{4t}=\overbrace{2K_4\oplus 2K_4\oplus\cdots\oplus 2K_4}^{t}\oplus\overbrace{K_{4,4}\oplus K_{4,4}\oplus\cdots\oplus K_{4,4}}^{2\binom{t}{2}}$$

と分解される。Lemma 1 より、4人の組の内部で $2K_4\longrightarrow K_{2,2}$ が成り立つ。また、Lemma 3 より、4人ずつの組同志で $K_{4,4}\longrightarrow K_{2,2}$ が成り立つ。従って、$MDD(m,n=1,\lambda=2)$ が得られる。

Lemma 11. $\lambda=2,\ m\equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow {}^{\exists}MDD(m,n=1,\lambda=2)$

（証明） $m=4t+5\ (t\geqq 0)$ とおく。$V=\{1,2,\cdots,4t+5\}$ に対して、5人の組を1組 $(1,2,3,4,5)$ と、4人ずつの組を t 組 $(6,7,8,9),(10,11,12,13),\cdots,(4t+2,4t+3,4t+4,4t+5)$ 用意する。

$$2K_{4t+5}=2K_5\oplus\overbrace{2K_4\oplus\cdots\oplus 2K_4}^{t}\oplus\overbrace{2K_{5,4}\oplus\cdots\oplus 2K_{5,4}}^{t}\oplus\overbrace{K_{4,4}\oplus\cdots\oplus K_{4,4}}^{2\binom{t}{2}}$$

と分解される。Lemma 2 より、5人の組の内部で $2K_5\longrightarrow K_{2,2}$ が成り立つ。Lemma 1 より、4人の組の内部で $2K_4\longrightarrow K_{2,2}$ が成り立つ。Lemma 4 より、5人と4人の組同志で $2K_{5,4}\longrightarrow$

$K_{2,2}$が成り立つ。Lemma 3 より，4人ずつの組同志で $K_{4,4}$ $\rightarrow$ $K_{2,2}$が成り立つ。従って，$MDD(m, n=1, \lambda=2)$ が得られる。

拡張 lemma（Lemma 5, Lemma 6）を上記の Lemma 7 ～ Lemma 11 に適用すれば，①～④のいずれの場合にも $MDD(m, n, \lambda)$ が得られる。（定理1の証明終り）

2.5 DD定理

$MDD(m, n, \lambda)$ は，特に $n=1$ の場合には，単に Doubles Design（DD）とよび，$DD(m, \lambda)$ と書く。次の定理が成り立つ。

定理2 $\exists DD(m, \lambda)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & \lambda m(m-1) \equiv 0 \pmod 8 \\ \text{(ii)} & \lambda(m-1) \equiv 0 \pmod 2 \\ \text{(iii)} & m \geqq 4. \end{cases}$$

3. References

[1] C.Huang and A.Rosa,On the existence of balanced bipartite designs,Utilitas Math. 4(1973),55-75.

[2] C.Huang,On the existence of balanced bipartite designs II, Discrete Math. 9(1974),147-159.

[3] K.Ushio,Bipartite decomposition of complete multipartite graphs,Hiroshima Math. J. 11(1981),321-345.

[4] K.Ushio,On balanced claw designs of complete multi-partite graphs,Discrete Math. 38(1982),117-119.

[5] 潮 和彦，完全m組グラフの balanced bipartite design について，日本数学会昭和57年度年会応用数学分科会講演予稿集，102-105.