数理解析研究所講究録
第473巻 1982年 79-85

On subrings of finitely generated rings

阪大理　小野田信春 (Nobuharu Onoda)

以下、環はすべて可換で単位元1をもつものとする。このとき、環の拡大 $D \subseteq A$ を考える。ここで、D、Aは共に reduced であり、Dは noetherian、AはD上有限生成であると仮定する。以下においては、AのD-subalgebra R を考察の対象とし、Rが再びD上有限生成となるのはどのような場合であるかということについて考えてみたい。この問題は Hilbertの第14問題と密接な関係があり、D上有限生成となるためのRに対する種々な条件が多くの人達によって与えられている。とりわけ、次の定理の成立することが[1]において証明されている。

定理A. DとRは上述の通りとする。更に、Dは体であって、かつRは整域であると仮定する。このとき、もしもRが noetherian であって、Rの derived normal ring R' が

equidimensional であるならば、R は D 上有限生成である。

ここで、R の derived normal ring とは R の商体 K における R の整閉包のことであり、また、R' が equidimensional であるとは R' の任意の maximal ideal M' に対し、$ht(M') = \dim R'$ が成立することを意味する。この小論の目的はこの定理を D が必ずしも体でない場合について拡張することにある。この目的のために、R の部分集合 $\mathcal{A}_D(R)$ を次のように定義する。

$$\mathcal{A}_D(R) = \{ a \in R \mid 0 \neq a \text{ かつ } R_a \text{ は } D \text{ 上有限生成} \} \cup \{0\}$$

このとき、次の3つの補題の成り立つことが証明できる。

補題 1. $\mathcal{A}_D(R)$ は R の radical ideal であって、かつそれは R の regular element を含む。

補題 2. $\mathcal{A}_D(R[X_1, \cdots, X_n]) = \mathcal{A}_D(R)[X_1, \cdots, X_n]$. ただし、ここに $X_1, \cdots, X_n$ は不定元である。

補題 3. (1) P を R の prime ideal とする。このとき、R_P が D 上の locality であるための必要充分条件は $\mathcal{A}_D(R) \not\subseteq P$ とな

ることである。

(2) $\mathfrak{p}$ を D の prime ideal とする。このとき、$R_{\mathfrak{p}}$ が $D_{\mathfrak{p}}$ 上有限生成であるための必要充分条件は $\mathfrak{A}_D(R)\cap D \not\subset \mathfrak{p}$ となることである。

補題1と補題3により次の定理を得るが、この定理は R が D 上有限生成になるかどうかということは、局所的な性質であるということを示している。

定理4. 次の条件は互いに同値である。

(1) R は D 上有限生成である。

(2) 任意の R の prime ideal P に対し、R_P は D 上の locality である。

(3) 任意の D の prime ideal $\mathfrak{p}$ に対し、$R_{\mathfrak{p}}$ は $D_{\mathfrak{p}}$ 上有限生成である。

さて、ここから先は、D は pseudo-geometric domain であってかつ任意の D 上の normal locality は analytically irreducible であると仮定する。更に、記述を簡単にするために、R および A はいずれも整域であると仮定する。ここで、念のために pseudo-geometric domain の定義を思い出しておく。

定義．整域 D が pseudo-geometric domain であるとは、次の2つの条件を満たすことをいう。

(1) D は noetherian domain である。

(2) D の任意の prime ideal $\mathfrak{p}$ と、任意の整拡大 $D/\mathfrak{p} \subseteq E$ に対しもしも、$Q(E)$ が $Q(D/\mathfrak{p})$ 上有限次代数拡大体であるならば、E は $D/\mathfrak{p}$-module として有限生成である。

さて、R の prime ideal P をとって剰余環 R/P を考えるとき、$\mathfrak{p} = P \cap D$ に対し、必ずしも $\mathcal{A}_{D/\mathfrak{p}}(R/P) \neq (0)$ とは限らない。言い換えれば、R/P を部分環としてもつような $D/\mathfrak{p}$ 上有限生成な環は必ずしも存在するとは限らない。しかし、この点に関して次の定理が成立する。

定理5．R の prime ideal P が次の等式を満たすとする。

$$ht(P) + tr.deg_{D/\mathfrak{p}} R/P = ht(\mathfrak{p}) + tr.deg_D R$$

但し、ここで $\mathfrak{p} = P \cap D$．このとき $\mathcal{A}_{D/\mathfrak{p}}(R/P) \neq (0)$ である。

この定理を使って次の補題を証明することができる。以下、D', R', A' は各々 D, R, A の derived normal rings を表わすものとする。

補題6. R' の prime ideal P' に対し、$P = P' \cap R$, $\mathfrak{p}' = P' \cap D'$ とおく。もしも

$$ht(P') + tr.deg_{D'/\mathfrak{p}'} R'/P' = ht(\mathfrak{p}') + tr.deg_{D'} R'$$

が成り立ち、更に R_P が noetherian ならば、$R'_{P'}$ は D' 上の locality である。

定理4および補題6に述べた結果をまとめることにより次の定理が得られた。

定理7. R が D 上有限生成であるための必要充分条件は、R が locally noetherian かつ D' と R' との間に dimension formula が成り立つことである。

更にこの定理は次の形に拡張することが可能であるが、その証明には補題2が必要である。

定理8. R が locally noetherian であって、かつ、任意の R' の maximal ideal M' に対し、maximal ideal N をもつ R' 上の locality S で、$R'_{M'}$ を dominate しかつ $\mathfrak{m}' = N \cap D'$ とするとき、

$$ht(N) + tr.deg_{D'/\mathfrak{m}'} S/N = ht(\mathfrak{m}') + tr.deg_{D'} S$$

を満たすものが存在するとする。このとき R は D 上有限生成である。

系. R が locally noetherian であって、かつ、自然な写像 $\mathrm{Spec}(A') \longrightarrow \mathrm{Spec}(R')$ が surjective であるならば、R は D 上有限生成である。

最後に定理7の応用をひとつ示すことにする。そのために補題を2つ用意する。

補題9. R' は equidimensional であり、更に

$$\dim R' = \dim D' + \mathrm{tr.deg}_{D'} R'$$

を満たすとする。このとき R' の任意の maximal ideal M' に対し、$m' = M' \cap D'$ とおけば次が成立する。

$$\mathrm{ht}(M') + \mathrm{tr.deg}_{D'/m'} R'/M' = \mathrm{ht}(m') + \mathrm{tr.deg}_{D'} R'.$$

補題10. D が任意の0でない元 a に対し $\dim D_a = \dim D$ を満たすならば、$\dim R' = \dim D' + \mathrm{tr.deg}_{D'} R'$ が成立する。

この2つの補題と定理7を合わせることにより次の定理が得られたことになるが、この定理は、定理Aの（D が必ずしも

体でない場合への）自然な拡張の１つである。

定理11. D は任意の 0 でない元 a に対し $\dim Da = \dim D$ を満たすものとする。このとき、R が locally noetherian であって、更に R' が equidimensional であるならば、R は D 上有限生成である。

参考文献

[1] N. Onoda and K. Yoshida, On noetherian subrings of an affine domain, Hiroshima Math. J. 12 (1982), 377－384.

[2] N. Onoda, Subrings of finitely generated rings over a pseudo-geometric ring, to appear.