数理解析研究所講究録
第 473 巻 1982 年 96-105

ある種の微分が作用するホップガロア拡大について

岡山大・理　中島 惇 (Atsushi Nakajima)
岡山理大　横川賢二 (Kenji Yokogawa)

Rを可換環, $\mathrm{char}\,R = p \neq 0$ (素数)とする。$H(p^m)$で次の様な Hopf alg. を表わすことにする。

$H(p^m) = R[D]/(D^{p^m})$ as alg. $\overline{D} = d$と書く。

$\Delta(d) = d\otimes 1 + 1\otimes d$, $\varepsilon(d) = 0$, $\lambda(d) = -d$

但し Δは diagonal map, εは augmentation map
λは antipode

さて, 一般にHを Hopf alg. とし, 環拡大 A/R が H-Hopf Galois 拡大とは

(i) Aは H-module algebra
(ii) Aは R-module として fin. gen. faith. proj.
(iii) $A\# H \cong \mathrm{End}_R(A)$

を満たす時と定義する。特に$H = H(p^m)$の時は (i) の条件は dがAに derivation として act するということである。
又, ここでは断らない限り, Aは可換環としておく。

Nakajima [4] の最近の結果によると

"A/R が $H(p^m)$-Hopf Galois 拡大

$$\Longrightarrow A = R[X_1]/(X_1^p-\alpha_1) \otimes \cdots \otimes R[X_m]/(X_m^p-\alpha_m) \qquad \alpha_i \in R$$"

($\otimes = \otimes_R$, 以下 $\overline{X_i} = x_i$ と書く)

今, $\partial_i \overset{\text{put}}{=} \frac{\partial}{\partial x_i} : A \longrightarrow A \quad \partial_i(x_j) = \delta_{ij}$ とおき

$H(p)^m = R[\partial_1] \otimes \cdots \otimes R[\partial_m] = H(p) \otimes \cdots \otimes H(p)$ とおくと, 拡大 A/R が $H(p)^m$-Hopf Galois 拡大であることが容易に知られる。(Cor. 4) 即ち.

"$H(p^m)$-Hopf Galois 拡大 $\Rightarrow$ $H(p)^m$-Hopf Galois 拡大"

ここでは, この逆について考えることにする。換言すれば $\{\partial_i\}$ から適当な derivation を作ることが出来るかどうかということである。なお詳しくは [5] を参照して下さい。

次の2つの結果は Nakajima [4] による。

<u>Proposition 1</u> (Nakajima)

A/R : $H(p)$-Hopf Galois 拡大 $\Longleftrightarrow A = R[X]/(X^p-\alpha)$, $d(x) = 1$

<u>Proposition 2</u> (Nakajima) A/R : $H(p^m)$-Hopf Galois 拡大

$$\Rightarrow A = R[X_1]/(X_1^p-\alpha_1) \otimes \cdots \otimes R[X_m]/(X_m^p-\alpha_m) \qquad \alpha_i \in R$$

そして d の $x_i = \overline{X_i}$ への action は $dx_1 = 1$, $x_i = d^{p^{m-1}-p^{i-1}}(x_m)$,

$dx_i \in R[x_1, \cdots, x_{i-1}]$ である。

<u>Remark</u>　$dx_i \in R[x_1, \cdots, x_{i-1}]$ であるが，d の precise action on x_i は不明であることに注意しておく。又 $x_1, \cdots, x_m$ の選び方も unique に定まらず，$\{x_1, \cdots, x_m\}$ をうまく選ぶことも問題になることに注意しておく。

<u>Proposition 3.</u>　H_i を finite co-commutative Hopf alg. $i=1,2$ A/R を $H_1 \otimes H_2$ - Hopf Galois 拡大とする。

$\Rightarrow$ A の subalg. A_1, A_2 が存在して，A_i/R は H_i - Hopf Galois 拡大で　$A \cong A_1 \otimes A_2$　as $H_1 \otimes H_2$ - module algebras.

<u>Proof.</u>　$A_1 = A^{H_2} = \{a \in A \mid h \cdot a = \varepsilon(h) a \text{ for } {}^\forall h \in H_2\}$, $A_2 = A^{H_1}$ とおけば，$A_1 \cong Hom_{H_1 \otimes H_2}(H_1, A)$, $A_2 \cong Hom_{H_1 \otimes H_2}(H_2, A)$ となるから，あとは easy である。

<u>Corollary 4.</u>　A/R を $H(p)^m = R[\partial_1, \cdots, \partial_m]$ - Hopf Galois 拡大とすると，　$A = R[X_1]/(X_1^p - \alpha_1) \otimes \cdots \otimes R[X_m]/(X_m^p - \alpha_m)$, $\partial_i(x_j) = \delta_{ij}$

<u>Proof</u>　Prop. 1 及び Prop. 3 より明らか。

さて，以下では $H(p)^m$ - Hopf Galois 拡大は $H(p^m)$ - Hopf Galois 拡大であることを示そう。そのために

<u>Lemma 5</u>　2項係数 $\binom{p^{n-1}-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod p$　$n \geq 2$.

<u>Proof.</u> $\binom{p^{n-1}-1}{k}+\binom{p^{n-1}-1}{k+1}=\binom{p^{n-1}}{k+1}$ 及び $\binom{p^{n-1}-1}{0}=1$ 及び $\binom{p^{n-1}}{k}=\begin{cases}1 & k=0,\ p^{n-1}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$ より従う。

<u>Lemma 6</u> $A=R[X_1]/(X_1^p-\alpha_1)\otimes\cdots\otimes R[X_m]/(X_m^p-\alpha_m)$ を R の $H(p)^m$-Hopf Galois 拡大とする。このとき R-derivation $A\to A$ で $d(x_1)=1$, $d^{p^{k-1}-p^{k-2}}(x_k)=x_{k-1}$ $(2\leqq k\leqq m)$ となるものが存在する。例えば $d=P_0\partial_1+P_1\partial_2+\cdots+P_{m-1}\partial_m$ で P_i は $p\neq 2$ の時は $P_0=1$, $P_i=(-1)^i x_1^{p-1}\cdots x_i^{p-1}$ $(1\leqq i\leqq m-1)$.
$p=2$ の時は $P_0=1$, $P_1=x_1$, $P_i=P_{i-1}x_i+x_1\cdots x_{i-1}\alpha_{i-1}$ $(2\leqq i\leqq m-1)$ と取れば良い。このとき $d^{p^m-1}\neq 0$ で $d^{p^m}=0$ である。

<u>Proof</u> m に関する帰納法で証明する。$m=1,2$ の時は明らかであろう。$k\leqq m-1$ なる k について $d(x_1)=1$, $d^{p^{k-1}-p^{k-2}}(x_k)=x_{k-1}$ $(2\leqq k\leqq m-1)$ を仮定する。このとき $d^{p^{k-1}}(x_k)=d(x_1)=1$ $(1\leqq k\leqq m-1)$ であり，従って $d^{p^{k-1}}(P_{k-1})=0$ である。
さて $p\neq 2$ とすると
$$
\begin{aligned}
d^{p^{m-1}-p^{m-2}}(x_m) &= d^{p^{m-1}-p^{m-2}-1}((-1)^{m-1}x_1^{p-1}\cdots x_{m-1}^{p-1})\\
&= d^{p^{m-2}-1}d^{p^{m-2}(p-2)}((-1)^{m-1}x_1^{p-1}\cdots x_{m-1}^{p-1})\\
&= d^{p^{m-2}-1}((-1)^{m-1}x_1^{p-1}\cdots x_{m-2}^{p-1}(d^{p^{m-2}})^{p-2}(x_{m-1}^{p-1}))
\end{aligned}
$$
(ここで $d^{p^{m-2}}$ が derivation であること及び $d^{p^{m-2}}(P_{m-2})=0$ であることを用いた。)
$$
= d^{p^{m-2}-1}((-1)^{m-1}x_1^{p-1}\cdots x_{m-2}^{p-1}(p-1)x_{m-1})
$$

$$= d^{p^{m-2}-1}(d(x_{m-1})x_{m-1})$$

$$= \sum_{k=0}^{p^{m-2}-1} \binom{p^{m-2}-1}{k} d^{k+1}(x_{m-1})\, d^{p^{m-2}-1-k}(x_{m-1})$$

$$= d(x_{m-1})d^{p^{m-2}-1}(x_{m-1}) - d^2(x_{m-1})d^{p^{m-2}-2}(x_{m-1}) + \cdots$$

$$+ d^{p^{m-2}-2}(x_{m-1})\,d^2(x_{m-1}) - d^{p^{m-2}-1}(x_{m-1})\,d(x_{m-1})$$

$$+ d^{p^{m-2}}(x_{m-1})\,x_{m-1} \quad (\text{by Lemma } 5)$$

$$= x_{m-1}$$

次に $p=2$ とする。 Lemma 5 によって

$$d^{2^{k-1}-1}(x_1\cdots x_{k-1}) = \sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} d^{i}(x_1\cdots x_{k-2})\, d^{2^{k-1}-1-i}(x_{k-1})$$

$$=(x_1\cdots x_{k-2})d^{2^{k-2}-1}(d^{2^{k-2}}(x_{k-1})) + d(x_1\cdots x_{k-2})$$

$$d^{2^{k-2}-2}(d^{2^{k-2}}(x_{k-1})) + \cdots\cdots$$

$$+ d^{2^{k-2}-1}(x_1\cdots x_{k-2})\,d^{2^{k-2}}(x_{k-1}) + d(d^{2^{k-2}-1}(x_1\cdots$$

$$x_{k-2}))\,d^{2^{k-2}-1}(x_{k-1}) + \cdots + d^{2^{k-2}}(d^{2^{k-2}-1}(x_1\cdots x_{k-2}))x_{k-1}$$

$$= 1 \quad (\text{if we assume } d^{2^{k-2}-1}(x_1\cdots x_{k-2})=1.)$$

(ここで $d^{2^{k-2}}(x_{k-1})=1$ にも注意せよ。)

従って帰納法で $d^{2^{k-1}-1}(x_1\cdots x_{k-1})=1$ がわかる。

さて, $d^{2^{m-1}-2^{m-2}}(x_m) = d^{2^{m-2}}(x_m)$

$$= d^{2^{m-2}-1}(P_{m-1}) = d^{2^{m-2}-1}(P_{m-2}x_{m-1} + x_1\cdots x_{m-2}\alpha_{m-2})$$

$$= d^{2^{m-2}-1}(d(x_{m-1})x_{m-1}) + \alpha_{m-2}\, d^{2^{m-2}-1}(x_1\cdots x_{m-2})$$

$$= \sum_{i=0}^{2^{m-2}-1} d^{1+i}(x_{m-1})\,d^{2^{m-2}-1-i}(x_{m-1}) + \alpha_{m-2}$$

$$= d(x_{m-1})d^{2^{m-2}-1}(x_{m-1}) + d^2(x_{m-1})d^{2^{m-2}-2}(x_{m-1}) + \cdots$$

$$+ d^{2^{m-3}}(x_{m-1})\,d^{2^{m-3}}(x_{m-1}) + \cdots + d^{2^{m-2}-2}(x_{m-1})d^2(x_{m-1})$$

$$+ d^{2^{m-2}-1}(x_{m-1})\, d(x_{m-1}) + d^{2^{m-2}}(x_{m-1})\, x_{m-1} + \alpha_{m-2}$$
$$= (d^{2^{m-3}}(x_{m-1}))^2 + x_{m-1} + (x_{m-2})^2 = x_{m-1}$$

$d^{p^m-1} \neq 0$ 及び $d^{p^m}=0$ は easy.

さて，A/R を $H(p)^m$－Hopf Galois拡大とし，d を Lemma 6で定まった derivation とする。dを自然にAにactさせることにより，Aは$H(p^m)$－module alg. となる。$d^0=1, d, d^2, \cdots, d^{p^m-1}$ はA上(左から見て) lin. indep. であるので剰余体にうつし，rank を調べることにより $A \# H(p^m) \cong End(A)$ がわかる。従って Corollary 4 と併せて

<u>Theorem 7.</u> Aをcommutative R-alg とする。この時 A/R が $H(p^m)$－Hopf Galois extension $\Leftrightarrow$ A/R が $H(p)^m$－Hopf Galois extension.

<u>Remark</u>. 容易に解かる様に，$m \neq 1$ のとき，$H(p^m)$ と $H(p)^m$ は同型ではない。従って一般に環拡大 A/R に対して，それを Hopf Galois拡大とする様な Hopf algebra はたくさん存在することがわかる。

<u>Remark</u>. Hopf Galois拡大の概念は可換環の拡大だけに

止まらず，一般の非可換環の拡大に対しても定義されており[8]，特にalg.の場合にはcohomologicalにも美しい結果を持つことがわかっている[9]。Theorem 7 は Hopf Galois 拡大の概念を可換に限れば，$H(p^m)$-Hopf Galois と $H(p)^m$-Hopf Galois の概念が一致することを示している。もし可換に限らず，alg まで含めると，$H(p)^m$-Hopf Galois 拡大であって、$H(p^m)$-Hopf Galois 拡大にならない例があることを注意しておく。(なお，現在調査中であるので，適当な時に又発表したいと思っています。)

さて，Proposition 2 の後の Remark で $H(p^m)$-Hopf Galois 拡大 $A=R[x_1,\cdots,x_m]$, $x_i^p=d_i\in R$ において d の x_i への作用が不明であることを注意したが以下では，d の x_i への作用をきちんと決めること又は作用がきちんと決まる様に $\{x_i\}$ を取り直すことを考えよう。そのためにまず $R[x_1,\cdots,x_m]$, $x_i^p=d_i\in R$ の monomial に対して (weighted) degree を次の様に定義する。

$$\text{degree}\,(r x_1^{e_1}\cdots x_m^{e_m}) = \sum_{i=1}^{m} e_i p^{i-1}, \quad 0\neq r\in R,\ 0\leqq e_i\leqq p-1$$

$$\text{degree}\,(0) = -1$$

さて，$H(p^m)$ (又は $H(p)^m$) Hopf Galois拡大においては $\{x_1^{e_1}\cdots x_m^{e_m}\}_{0\leqq e_i\leqq p-1}$ は A の R-free basis [4] より上記の degree は well-defined である。さらに p 進展開を考えれば degree を与えれば、その degree の monic poly. は一意に定まることに注意

しておく。次の Lemma は degree の定義から容易である。

<u>Lemma 8</u>. $A=R[x_1,\cdots,x_m]$, $x_i^p=\alpha_i\in R$ を R の $H(p^m)$-Hopf Galois 拡大とする。さらに $\{x_1,\cdots,x_m\}$ は $d(x_1)=1$, $d(x_i)=P_{i-1}$ $(i\geqq 2)$ とする。但し $\{P_i\}$ は Lemma 6 の Polynomial.

$\Rightarrow$ (1) f を degree l の monic monomial とすると

$d(f)=$ (degree $l-1$ の monomial) $+$ (degree $l-2$ 以下の monomials の sum)

そして degree $l-1$ の monomial の係数は unit である。

(2) degree p^m-2 以下の monomial は integrable である。

従って degree p^m-2 以下の polynomial は integrable。

<u>Theorem 9.</u> A/R を $H(p^m)$-Hopf Galois 拡大とすると、$x_1,\cdots,x_m\in A$ が存在して $A=R[x_1,\cdots,x_m]$, $x_i^p=\alpha_i\in R$ そして $d=P_0\partial_1+\cdots+P_{m-1}\partial_m$ (即ち $d(x_i)=P_{i-1}$).

Proof. m に関する induction で証明する。Proposition 2 より $^\exists y_1,\cdots,y_m\in A$ s.t. $A=R[y_1,\cdots,y_m]$, $y_i^p=\beta_i\in R$, $d(y_1)=1$, $y_i=d^{p^{m-1}-p^{i-1}}(y_m)$, $d(y_i)\in R[y_1,\cdots,y_{i-1}]$.

$m=1$ の時は $x_1=y_1$ と取ればよい。$m-1$ 迄正しいと仮定する。即ち $^\exists x_i\in R[y_1,\cdots,y_i]$ s.t. $R[x_1,\cdots,x_i]=R[y_1,\cdots,y_i]$ そして d を $R[x_1,\cdots,x_i]$ に制限すれば $d=P_0\partial_1+\cdots+P_{i-1}\partial_i$

$(1 \leqq i \leqq m-1)$。さて $d(y_m) \in R[x_1,\cdots,x_{m-1}] = R[y_1,\cdots,y_{m-1}]$ であり $d^{p^{m-1}}(y_m)=1$ であるから．$d(y_m) = P_{m-1} + g(x_1,\cdots,x_{m-1})$ 但し $g(x_1,\cdots,x_{m-1})$ は次数 $p^{m-1}-2$ 以下の monomials の和．Lemma 8. より $^{\exists}G(x_1,\cdots,x_{m-1})$ s.t. $dG=g$。$x_m = y_m - G(x_1,\cdots,x_{m-1})$ とおけば $d(x_m) = P_{m-1}$ となり，$R[x_1,\cdots,x_m] = R[y_1,\cdots,y_m]$ である。

<u>Remark</u> Theorem 9. は Lemma 6 をみたすすべての $\{P_i\}$ について成立する。

<u>Corollary 10</u> $A = R[x_1,\cdots,x_m]$, $x_i^p \in R$ を R の $H(p^m)$-Hopf Galois拡大とする。但し．$d(x_1)=1$, $x_i = d^{p^{m-1}-p^{i-1}}(x_m)$, $d(x_i) \in R[x_1,\cdots,x_{i-1}]$ とする。このとき d の作用を $A_i = R[x_1,\cdots,x_i]$ に制限することにより，A_i/R は $H(p^i)$-Hopf Galois 拡大となる。

References

[1] R.Baer: Algebraishe Theorie der differentierbaren Funktionenkörper I, Sitzungsberichte Heidelberger Akademie, 1927,15-32.

[2] S.U.Chase and M.E.Sweedler: Hopf Algebras and Galois Theory,

Lecture Notes in Mathematics 97, Springer-Verlag, Berlin, 1969.

[3] A.Hattori: On higher derivations and related topics, Seminar on Derivations and Cohomology of Algebras (in Japanese), Reseach Institute for Mathematical Science, Kyoto University, 1970.

[4] A.Nakajima: A certain type of commutative Hopf Galois extensions and their groups, to appear in Math. J. Okayama Univ.

[5] A.Nakajima and K.Yokogawa: Hopf Galois extensions with Hopf algebras of derivation type, to appear.

[6] S.Suzuki: Some types of derivations and their applications to field theory, J. Math. Kyoto Univ. 21 (1981), 375-382.

[7] M.E.Sweedler: Hopf Algebras, Benjamin, New York,1969.

[8] K.Yokogawa: Non-commutative Hopf Galois extensions, Osaka J. Math. 18 (1981), 67-73.

[9] K.Yokogawa: The cohomological aspects of Hopf Galois extensions over a commutative ring, Osaka J. Math. 18 (1981), 75-93.

[10] K.Yokogawa: A pair of subalgebras in an Azumaya algebra, to appear in Osaka J. Math.