数理解析研究所講究録
第 474 巻 1982 年 52-61

Projective one-parameter family に対する Deligne, Gabber, Beilinson-Bernstein の定理について

東大 理 斎藤盛彦

$f : X \to Y$ を algebraic variety の間の proper morphism とする。$\underline{\underline{IC}}^{\cdot}(X) = \underline{\underline{IC}}^{\cdot}(X, \mathbb{C}_{X_{reg}})$ を X の Intersection cohomology の complex とすると このとき

$$\mathbb{R} f_* \, \underline{\underline{IC}}^{\cdot}(X) = \bigoplus_{\alpha} \underline{\underline{IC}}^{\cdot}(V_\alpha, L_\alpha)[l_\alpha] \quad \text{in } D^b_c(\mathbb{C}_Y)$$

が成り立ち, さらに f が projective なら Y に関し relative な hard Lefschetz も成立する。ただし、ここで V_α は Y の closed irreducible subvariety, L_α は V_α の Zariski open set 上の local system, l_α は integer である。

この結果は 表題の4人によって mod p reduction を使うことにより証明された。(cf. [G-M] [B2])

ここでは 上の結果を、X, Y が (nonsingular) complex manifold, f が projective, さらに $\dim Y = 1$ という条件の下で、analytic に証明する。

標数0でWeil Conjectureに対応するのは、Hodge Theoryであるが、代数解析におけるDe Rham対応を使うことにより上の結果がbase spaceに向くrelativeなHodge filtrationこみで成り立つことを示す。(ただし、同じ仮定の下で)。(cf. 2.3)

それについて少し詳しく説明すると、De Rham対応で $Rf_*\mathbb{C}$ に対応するのはGauss-Manin system $\int_f \mathcal{O}_X$ であるが、$\int_f \mathcal{O}_X$ はcanonicalにHodge filtration $\mathcal{F}$ を持ち、f がsmoothならGriffiths-Schmidのvariation of Hodge structureと一致する。このとき上の仮定の下で、$\mathcal{F}$ はstrictly compatibleなfiltrationであることがわかり、さらに、$\mathcal{F}$ はvariation of Hodge structureとsingular fibreのcohomologyのHodge filtrationから定まり、又逆もいえることがわかる。(cf. 3.3)

次の問題は、X がsingularな時、又 $\dim Y > 1$ なる場合はどうなるかであるが、これはまだ全然わかっていない。singularな場合はまず、Intersection cohomologyにpure Hodge structureを入れる問題をとかなければならない。又、$\dim Y > 1$ の場合は、base spaceが高次元の場合のlimit mixed Hodge structureにあたるものをみつけなければならない。共に問題になるのは、genericに与えられたvariation of Hodge structureをどうやってcanonicalに

Cohen-Macaulay filtration として全体に接続~~[illegible]~~するかであるが
これがまずわからないのである。

予想としては、

$$\int_f \mathbb{Q}_X = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \int_f^i \mathbb{Q}_X[-i] \text{ in } DF(\mathcal{D}_Y)$$

が一般に成りたち かつ $\int_f^i \mathbb{Q}_X$ は self dual of weight i で minimal extension の直和に分解する、となる。

§1. Y を $n+1$ 次元複素多様体、S を単位板 $\{|t|<1\}$
$f: Y \longrightarrow S$ を projective morphism とする。
ここで f は $S^* = S \setminus \{0\}$ 上 smooth と仮定する。特に Y_t $(t\neq 0)$ は projective mfd になる。このとき γ を
$\gamma: H^k(Y_0, \mathbb{C}) \cong H^k(Y, \mathbb{C}) \to H^k(Y_t, \mathbb{C})$ で定め、$M \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}} H^k(Y_t, \mathbb{C})$ を monodromy、又 $K^k := \mathrm{Ker}\,\gamma$ とする。$\{0\} \overset{i}{\hookrightarrow} S \overset{j}{\hookleftarrow} S^*$ を canonical inclusion とすると
$i_* K^k = \mathcal{H}^0_{\{0\}} R^k f_* \mathbb{C}_Y$ であり、さらに、$R^k f_* \mathbb{C}_Y$ は constructible sheaf として $(H^k(Y_0), H^k(Y_t), \gamma, M)$ より定まり、又逆もいえることがわかる。つまり、$H^k(Y_t)$ と M から $j^{-1} R^k f_* \mathbb{C}_Y$ が定まり、γ により $H^k(Y_0) = (R^k f_* \mathbb{C}_Y)_0$ とはりあわさって、$R^k f_* \mathbb{C}_Y$ が定まる。
このとき、次が成り立つ。

定理(1.1) i) $\mathbb{R}f_*\mathbb{C}_Y \cong \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} R^kf_*\mathbb{C}_Y[-k]$ in $D^b_c(\mathbb{C}_S)$

ii) $R^kf_*\mathbb{C}_Y = i_*K^k \oplus j_*j^{-1}R^kf_*\mathbb{C}_Y$

iii) L を f の rel. ample line bundle の 1-st chern class とすると

$L^k : K^{n+1-k} \xrightarrow{\sim} K^{n+1+k}$, $L^k : j_*j^{-1}R^{n-k}f_*\mathbb{C}_Y \xrightarrow{\sim} j_*j^{-1}R^{n+k}f_*\mathbb{C}_Y$

注意 1) i)の分解は $\dim S > 1$ では一般に不成立.

2) ii)の分解は local invariant cycle Theorem

(i.e., $\mathrm{Im}\, r = \mathrm{Ker}(M - id)$) と同値.

3) 定理(1.1)は $\dim S = 1$ なら同様に成立 (Y, S: non sing)

4) K^k には weight k の pure Hodge structure が入る.

定理(1.1)を証明するには, 代数解析, つまり $\mathcal{D}$-Module の理論をつかって, Steenbrink の limit mixed Hodge structure の理論が適用可能なようにする.

§2. Gauss-Manin system と Hodge filtration

$f : Y \to S$ を 前 のとおりとする. t を S の coordinate function とすると, Gauss-Manin system $\int_f \mathcal{O}_Y \in D^b(\mathcal{D}_S)$ を次のように定義する. (cf Pham)

定義(2.1) $\int_f \mathcal{O}_Y = \mathbb{R}f_*(\Omega_Y^{\cdot} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\partial_t])[1]$

ただし、$d(\sum \omega_i \otimes \partial_t^i) = \sum d\omega_i \otimes \partial_t^i - \sum df \wedge d\omega_i \otimes \partial_t^i$

$(df = f^* dt)$.

ここで $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ であり、$\int_f \mathcal{O}_Y$ は次の様に $\mathcal{D}_S$-Module の complex の構造をもつ。∂_t^j はそのまま多項式の部分にかける。

$g(t)$ は、∂_t とは非可換であるから、一番右はしにデルタ関数 $\delta(f(x)-t)$ があるものとみなして、$g(t)\partial_t^j = \sum_i \partial_t^i h_{ij}(t)$ と変換してから t に f ($= f^*t$) を代入する。

次に $\int_f^k \mathcal{O}_Y = \mathcal{H}^k(\int_f \mathcal{O}_Y)$ を（k番目の）Gauss-Manin system ということにする

注意. $\int_f^k \mathcal{O}_Y$ は regular holonomic（柏原, 河合）

定義(2.2) $\int_f \mathcal{O}_Y$ 上の Hodge filtration $F^{\cdot}$ を次の様に定義する。(cf [B2])

まず、$\Omega_Y^{\cdot} \otimes \mathbb{C}[\partial_t]$ 上の filtration $F^{\cdot}$ を

$$F^p(\Omega_Y^{k+1} \otimes \mathbb{C}[\partial_t]) = \sum_{i \leq k-p} \Omega_Y^{k+1} \otimes \partial_t^i$$

で定義すると、$\int_f \mathcal{O}_Y = \mathbb{R}f_*(\Omega_Y^{\cdot} \otimes \mathbb{C}[\partial_t])[1]$ は induced filtration $F^{\cdot}$ をもつ。

定理 (2.3) i) $\int_f \mathcal{O}_Y = \bigoplus_{h\in\mathbb{Z}} \int_f^h \mathcal{O}_Y\,[-h]$ in $DF(\mathcal{D}_S)$

ii) $\int_f^h \mathcal{O}_Y = \mathcal{H}^0_{[Z]} \int_f^h \mathcal{O}_Y \oplus j_{!*}\, j^{-1} \int_f^h \mathcal{O}_Y$

iii) $L^k : \int_f^{n-k} \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\sim} \int_f^{n+k} \mathcal{O}_Y \{k\}$

iv) $\int_f^{n-h} \mathcal{O}_Y \simeq \left(\int_f^{n+h} \mathcal{O}_Y\right)^* \{-n\}$

ただし. $j_{!*}\mathcal{M}$ は $\mathcal{M}$ の intermediate direct image (又は minimal extension な $\mathcal{M}$), $j^{-1} j_{!*}\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}$, $\mathcal{H}^0_{[Z]}(j_{!*}\mathcal{M}) = 0$, $\mathcal{H}^0_{[Z]}(j_{!*}\mathcal{M})^* = 0$ で unique に定まる.
又. $\mathcal{M}^*$ は $\mathcal{M}$ の dual system $\mathcal{E}xt^{\dim S}_{\mathcal{D}_S}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_S) \otimes_{\mathcal{O}_S} (\Omega_S^{\dim S})^{\otimes -1}$ であり. $\mathcal{M}$ が Cohen-Macaulay filtration (つまり $Gr\,\mathcal{M}$ が $Gr\,\mathcal{D}$ 上 C.M) をもてば $\mathcal{M}^*$ にも C.M filtration が canonical に定まる。さらに. $\mathcal{M}$ が self dual of wt i とは $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}^*\{-i\}$ なることである。(iii) iv) から $\int_f^i \mathcal{O}_Y$ は self dual of weight i) 一般に weight i の variation of polarized Hodge structure は self dual of weight i になる.

de Rham 対応 というのを使うことにより. 定理(2.3) から定理(1.1) が導かれる、このとき i) から i) はて従いことに対応する. ($\mathcal{H}^0_{[Z]} \int_f^h \mathcal{O}_Y \overset{DR}{\leftrightarrow} \mathcal{H}^0_{[Z]} R^{h+1} f_*$, $j_{!*}j^{-1}\int_f^h \mathcal{O}_Y \leftrightarrow j_{!*}i^{-1} R^h f_* \mathbb{C}_Y$)

§3 limit Hodge filtration との関係

$\mathcal{L}^h$ を $\mathcal{O}_{S^*}\otimes_{\mathbb{C}} j^{-1}R^h f_* \mathbb{C}_Y$ の canonical extension とする

つまり $\mathcal{L}^h$ は S 上の free $\mathcal{O}_S$・Module で reg. sing connection ∇ をもつ ことをみたす。(cf Deligne)

i) ∇ は 原点以外で regular で $\mathrm{Ker}\,\nabla = j^{-1}R^h f_* \mathbb{C}_Y$

ii) 原点では simple pole をもつ。その $\mathrm{res}(t\nabla_{\frac{d}{dt}})$ の固有値は $[-1,0)$ に含まれる。

命題 (3.1) (Brylinski) ~~...~~

$j^{-1}\mathcal{L}^h$ は $j^{-1}\int_f^h \mathcal{O}_Y$ と $\mathcal{D}_{S^*}$-Module として canonicalに同型

さらに $j^{-1}\mathcal{F}$ は S^* 上の Griffiths-Schmid variation of Hodge structure と一致する。

命題 (3.2) (Schmid)

$\hat{\mathcal{F}}$ ここに $j_* j^{-1}\mathcal{F} \cap \mathcal{L}^h$ とおくと、$\hat{\mathcal{F}}^p$ は $\mathcal{L}^h$ の holo. subbundle. monodromy M が unipotent なら $\hat{\mathcal{F}}|_{t=0}$ は weight filtration $W_\cdot$ とともに mixed Hodge structure をなす。

($\hat{\mathcal{F}}|_{t=0}$ を limit Hodge filtration という)

次に $F^\cdot$ を $K^h = \mathrm{Ker}(\gamma: H^h(Y_0,\mathbb{C}) \to H^h(Y_t,\mathbb{C}))$ 上の Hodge filtration とする。

定理 (3.3) i) canonical inclusion $\mathcal{L}^n \hookrightarrow \int_f^n \mathcal{O}_Y$ が存在して、$j_{1*}j^{-1}\int_f^n \mathcal{O}_Y = \mathcal{D}_S \cdot \mathcal{L}^n$ となる。さらに

$$\mathcal{F}^p(j_{1*}j^{-1}\textstyle\int_f^n \mathcal{O}_Y) = \sum_{i\geq 0} \partial_t^i (\hat{\mathcal{F}}^{p+i}\mathcal{L}^n), \quad \mathcal{F}^p \cap \mathcal{L}^n = \hat{\mathcal{F}}^p$$

ii) $\mathcal{H}^0_{\{0\}} \int_f^n \mathcal{O}_Y = i_*(K^{n+1} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\partial_t])$ で

$$\mathcal{F}^p(\mathcal{H}^0_{\{0\}} \textstyle\int_f^n \mathcal{O}_Y) = i_*(\sum_{i\geq 0} F^{p+i+1}K^{n+1} \otimes \partial_t^i)$$

よって $\mathcal{F}$ から $H^\cdot(Y_0, \mathbb{C})$ と $H^\cdot(Y_\infty, \mathbb{C})$ の Hodge filtration が定まる。又、逆に $\mathcal{F}^\cdot$ と $F^\cdot$ から $\mathcal{F}^\cdot$ が定まる。

定理(3.3)の系として、いわゆる Scherk-Steenbrink の結果が導かれる。これは、Milnor fibre の cohomology の m.H.s. の Hodge filtration が Brieskorn lattice $\Omega^{n+1}_{\mathbb{C}^{n+1},0}/df\wedge d\Omega^{n-1}_{\mathbb{C}^{n+1},0}$ から、つまり周期積分 $\int_{\gamma(t)} \omega$ の asymptotic expansion の初項をみることにより、決定されるという結果である。

（注: [Sa'] の p16 の $\tilde{F}^\cdot$ があまり意味をもたないというのは誤りである。$\tilde{F}^\cdot$ から $F_S^\cdot$ は定まる cf [Sa, II]）

References

[B1] Brylinsk, J.L. : *Modules holonomes à singularités régulières et filtration de Hodge II* (preprint)

[B2] ——— : *Cohomologie d'intersection et faisceaux perverse*, Bourbaki seminar 585

[D] Deligne, P. : *Equations différentielles à point singuliers régulieres*, Springer Lec Note 163

[Ph] Pham, F. : *Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin*, Progress in Math. 2. Brikhauser.

[Sa] Saito, M. : *Hodge filtrations on Gauss-Manin Systems*. I. II (preprint)

[Sa′] ——— : 代数解析とHodge構造. 数理研講究録

[S-S] Scherk-Steenbrink : *On the mixed Hodge structure on the cohomology of the Milnor fiber* (preprint)

[Sc] : Schmid, W: Variation of Hodge structure
Inv. Math. 22

[St1] Steenbrink : Limit of Hodge structures
Inv. Math 31.

[St2] —— : Mixed Hodge structure on the vanishing
cohomology. Nordic Summer school 1976.

[K-K] Kashiwara-Kawai : On holonomic systems of
micro-differential equations III, RIMS. Publ.

[G-M] Goresky-MacPherson : On the topology of complex
algebraic maps. (preprint)