数理解析研究所講究録
第474巻 1982年 66-74

強擬凸領域におけるテプリッツ作用素の指数定理
（Venugopalkrishna, Burns, Boutet de Monvel より）

早大理工　　郡　敏昭

・複素平面上の単位円 $D=\{|z|<1\}$ で定義された正則函数で 2乗可積分な境界値をもつものの全体を

$$H=\{h=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \ : \ \sum|a_n|^2<\infty\}。$$

$\{|z|=1\}$ 上の連続函数 f に対し テプリッツ作用素 $T_f: H\longmapsto H$ は $T_f(h)=\pi(\tilde{f}\cdot h)$ と定義される。ここに $\pi: L^2(D)\longmapsto H$ は直交射影（Szöge作用素）であり，$\tilde{f}$ は f の $C(\bar{D})$ への任意の延長である。T_f は延長の仕方 $\tilde{f}$ に依存しない．このとき次の指数定理が成り立つ：　$f(z)\neq 0$，$\forall z\in\{|z|=1\}$ であるなら T_f はフレドホルム作用素，したがって $\ker T_f$，$\mathrm{coker}\, T_f$ とも有限次元で，

$$\mathrm{index}\, T_f=\dim\ker T_f-\dim\mathrm{coker}\, T_f=(f の巻数)$$
$$=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}d\log f$$

が成立つ。

ここで f が D内正則な函数の境界値となってるなら $\pi(f\cdot h) = f\cdot h$ で，T_f は同型となり index $T_f = 0$，したがって index T_f は f が正則函数の境界値であるための障害を表わしている．

以上の index theorem は表題に述べた人々により強擬凸な境界をもつ多様体の場合に拡張された．('72, '74, '78年)

1. Ω をスタイン多様体 X 内の相対コンパクトで強擬凸な境界をもつ開集合とする．E, F をΩの近傍で定義された正則なベクトルバンドルとし，（E, F 上およびΩ上の距離により）自乗可積分な E (F) の sections の全体を $L^2(\Omega, E)$ ($L^2(\Omega, F)$) と書く．また L^2-holomorphe な sections 全体のなす閉部分空間を $H^2(\Omega, E)$ ($H^2(\Omega, F)$) と書く。

C^∞-bundle homo. $\varphi : E \longrightarrow F$ が与えられたとき φ に対するテプリッツ作用素 $T_\varphi : H^2(\Omega, E) \longmapsto H^2(\Omega, F)$ を
$$T_\varphi = \pi_F \circ \varphi \circ \pi_E$$
で定義する．ここに π_E, π_F は直交射影 $L^2(\Omega, E) \longmapsto H^2(\Omega, E)$，Szöge作用素，を表わし．$\varphi : L^2(\Omega, E) \longmapsto L^2(\Omega, F)$ は写像 $s \longmapsto \varphi\cdot s$ を表わす．

次の定理が示される（[4]の p79→81）（[1]）．

定理 (1) $\varphi : E \longrightarrow F$ が $\partial\Omega = \bar{\Omega} - \Omega$ のある近傍で C^∞-isomorphe なら T_φ はフレドホルム作用素となり、

$$\operatorname{index} T_\varphi = \dim \ker T_\varphi - \dim \operatorname{coker} T_\varphi$$

が定義される。これを a-index(φ) (analytical index) と書く。

(2) a-index(φ) は bundle homo. φ の $\partial\Omega$ の近傍における isomorphism の homotopy 類のみに依存する。

(3) $\text{a-index}(\varphi\cdot\psi) = \text{a-index}(\varphi) + \text{a-index}(\psi)$

但 $\varphi : E \longrightarrow F$. $\psi : F \longrightarrow G$.

系 1. $\text{a-index} \quad K^0(\bar{\Omega}, \partial\Omega) \longmapsto \mathbb{Z}$

が定義される。(Oka-Grauert principle より $\forall x \in K^0(\bar{\Omega}, \partial\Omega)$ に対し、$\exists E, F$ holomorphic vector bundles on $\bar{\Omega}$, $\exists \varphi : E \longrightarrow F$ C^∞-isomorphism, such that φ isomorphe on a n.b.d of $\partial\Omega$, $d(\varphi) = x$. であるから $\text{a-index}\, x = \text{a-index}(\varphi)$ とすればよい。)

系 2. E, F (holomorphically) trivial とし、$\partial\Omega$ が単連結であるなら、$\forall \varphi : E \longrightarrow F$ C^∞ homomorph. で $\partial\Omega$ の n.b.d で isomorphe なものに対し $\text{a-index}(\varphi) = 0$.

Venugopalkrishna [1]. $\partial\Omega = S^{2n-1}$ のとき

$$\begin{array}{ccc} K^{-1}(S^{2n-1}) \cong [\,S^{2n-1}, \varinjlim GL(N,\mathbb{C})\,] & & \\ \delta \downarrow & & \\ K^{0}(\bar\Omega, \partial\Omega) & \xrightarrow[\text{a-index}]{} & \mathbb{Z} \end{array}$$

により a-index : $K^{-1}(S^{2n-1}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ を定義し，

$[\,S^{2n-1}, GL(N,\mathbb{C})\,] = \pi_{2n-1}(GL(N,\mathbb{C}))$ の生成元 (φ)

に対し，a-index (φ) を計算し，Vanugopalkrishna は

$$\text{a-index} = (-1)^n \deg$$

を示した．ここに degree : $\pi_{2n-1}(GL(N,\mathbb{C})) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$

$(N \gg 1)$ が Bott periodicity から定義される．こうして analytical index の topological formula が得られる．

Burns はこれを一般の強擬凸な場合に拡張した．

2. Burns の方法.

Ω はスタイン多様体 X^n 内の境界 $\partial\Omega$ が強擬凸な相対コンパクト開集合とする。$x_0 \in \Omega$ とする。

$(\varphi) \in K^{0}(\bar\Omega, \partial\Omega)$ であって次の条件を満たすものを構成しよう：

(i) $\varphi \mid \bar\Omega - \{x_0\} : E \mid \bar\Omega - \{x_0\} \longmapsto F \mid \bar\Omega - \{x_0\}$

は C^∞- isomorphe.（このとき，E，F の fibre dim を N と書く）

(ii) a-index $(\varphi) = +1$

(iii) φ の local degree at x_0 $=(-1)^n$, ここに local degree は x_0 での局所座標近傍内の x_0 を中心とする球面 S_0^{2n-1} により, $\varphi|S_0^{2n-1}: S_0^{2n-1} \mapsto GL(N, \mathbb{C})$ の degree として定義される。

<u>φ のつくり方</u>

Hilbert Syzygy 及び Cartan th. B より 次の $\overline{\Omega}$ 上の exact 列がある：

$$0 \to F_n \xrightarrow[\psi_n]{} F_{n-1} \xrightarrow[\psi_{n-1}]{} \cdots \xrightarrow[\psi_1]{} F_0 \to \mathcal{O}_{x_0}/\mathfrak{m}_{x_0} \cong \mathbb{C} \to 0$$

ここに $F_i \cong \mathcal{O}^{p_i}$ (vector bundle), ψ_i は holomorphic map 。

F_i 上の metric を適当にとり formal adjoint homo. $\psi_i^*: F_{i-1} \to F_i$ をつくる.

$E = \bigoplus_{\text{even}} F_i$, $F = \bigoplus_{\text{odd}} F_i$ とおく。

$\varphi = \psi + \psi^* : E \to F$ を

$$(\psi + \psi^*)(u) = \psi_i(u) \oplus \psi_{i+1}^*(u), \quad u \in F_i$$

と定義する。

$K^0(\overline{\Omega}, \overline{\Omega} - \{x_0\})$ の元として, (φ) と complex

$$0 \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \to 0$$

は同じものとなることに注意しよう。実際 $\overline{\Omega} - \{x_0\}$ において（上の exactness より）φ は isomorphe

になっている。　一方 x_0 での φ の local degree は $(-1)^n$ であることがわかる（[5]）。

ψ_i に対応して Toeplitz operator $T_{\psi_i} : H^2(\Omega, F_i) \longrightarrow H^2(\Omega, F_{i-1})$ が得られるが，complex

$$\bigstar \quad 0 \longrightarrow H^2(\Omega, F_n) \xrightarrow[T_{\psi_n}]{} \cdots \xrightarrow[T_{\psi_1}]{} H^2(\Omega, F_0) \longrightarrow 0$$

を考えると，Ω stein だから，

$$H^j(\Omega, \mathcal{L}^2_{hol}(F_i)) = 0 , \quad j \geq 1$$

により，★ は $i \neq 0$ で exact となり，また

$$\operatorname{coker} T_{\psi_1} \cong \mathbb{C} 。$$

一方 ★ の Hodge 分解を考え

$$a\text{-}index(\varphi) = index\ T_{\psi+\psi^*} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim \left(\ker T_{\psi_i} / \operatorname{Im} T_{\psi_{i+1}} \right)$$

がわかるから

$$a\text{-}ind(\varphi) = +1 。$$ ∎

$(\varphi) \in K^0(\bar{\Omega}, \partial\Omega)$ が，1点のみで特異な（isomorphism でない）homomorphism of vector bundles，の和に分解しているとき，上の結果より

定理。 $\varphi \in K^0(\bar{\Omega}, \bar{\Omega} - \bigcup_{j=1}^{k} x_j)$ に対し

$$a\text{-}ind\ \varphi = (-1)^n \sum_{i=1}^{k} \deg_{x_i} \varphi$$

を得る。

3. Boutet de Monvel の Toeplitz 作用素

Ω を $\mathbb{C}^n$ 内の強擬凸領域とし，C^∞-fn. r により

$\Omega = \{ r < 0 \}$ ，$dr \neq 0$ on $\partial\Omega$，により与えられているとしよう。

$$\alpha = \frac{1}{2i}(\partial r - \bar{\partial} r) \,|\, \partial\Omega$$

$$\Sigma^+ = \mathbb{R}^+ \alpha \subset T^*(\partial\Omega)$$

とする。α は contact form on $\partial\Omega$ を与える。(あるいは Σ^+ は $T^*(\partial\Omega)$ のシンプレティック部分多様体となる．とも言える。) $\partial\Omega$ 上の measure (with C^∞, >0 density) を定め，$L^2(\partial\Omega)$，$H^2(\partial\Omega) = L^2(\partial\Omega) \cap \ker \bar{\partial}_b$ を考える。ここに $\bar{\partial}_b$ 作用素は Kohn のそれ。

$\partial\Omega$ 上の擬微分作用素 (order m)

$$Qf(x) = \int e^{ix\xi} a(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi$$

$$a(x, \xi) = \sum_0^\infty a_{m-j}(x, \xi), \quad \xi \neq 0$$

a_{m-j} は homogeneous order $m-j$ in ξ。

π : $L^2(\partial\Omega) \longrightarrow H^2(\partial\Omega)$ を射影 (Szegö 作用素) として，Q に対応した Toeplitz 作用素を

$$T_Q = S \cdot Q \cdot S$$

で定義する。Q の主表象 $\sigma_m(Q)$ の Σ^+ への制限 $\sigma_m(Q) \,|\, \Sigma^+$ が可逆なとき T_Q は elliptic であると

いう。 Toeplitz作用素 T_Q が elliptic なら parametrix が存在する; $T_Q \cdot T_{Q'} \sim Id$. $T_{Q'} \cdot T_Q \sim Id$

$$\sigma(T_{Q'}) = \sigma(T_Q)^{-1}$$

ただし: $\sigma(T_Q) = \sigma_m(Q)|\Sigma^+$, $\sigma(T_{Q'}) = \sigma_{m'}(Q')|\Sigma^+$。

したがって $\dim \ker T_Q$, $\dim \operatorname{coker} T_Q$ が finite となり index T_Q が定義される.

T_Q が elliptic なら $g = \sigma(T_Q) = \sigma_m(Q)|\Sigma^+$ として $g \cdot \alpha \in \Sigma^+$ は invertible より, $[g] \in K^1(\partial\Omega)$ が定義される ([5]).

定理

$$\operatorname{index} T_Q = \langle ch[g], [\partial\Omega] \rangle$$
$$= \frac{(n-1)!}{(2n-1)!(2\pi i)^n} \int_{\partial\Omega} \operatorname{Trace}(g^{-1}dg)^{2n-1}$$

これは Atiyah - Singer の elliptic op に対する index theorem を用いて示されている。

なお T_Q が elliptic なとき, T_A: elliptic Toeplitz 作用素で $\sigma_\ell(A)|\Sigma^+$ が自己共役なものと, 0 にならない C^∞-函数 f (on $\partial\Omega$) が存在して

$$\sigma(T_Q) = \sigma_m(Q)|\Sigma^+ = \sigma(T_A) + \sigma(T_f),$$
$$\sigma(T_A) = \sigma_\ell(A)|\Sigma^+, \quad \sigma(T_f) = f \cdot ,$$

が示されるので

$$\text{index } T_Q = \text{index } T_f$$

となり 指数を考えるには. C^∞- fn, のみを考えれば十分なことがわかる。

文献

1. Venugopalkrishna: Fredholm operators associated with strongly pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^n$
J. Func Anal 9. p349–373. (1972)

2. Barro: On Venugopalkrishna's index problem, Rencontre sur l'analyse complexe…, Montreal 1975

3. Boutet de Monvel: On the index of Toeplitz operators
Inv. Math, 50 p249–272 (1979)

4. Folland - Kohn. The Neuman problem for the Cauchy-Riemann complexes, A. M. Studies 75.

5. Atiyah: Algebraic topology and elliptic operators
Comm. Pure Appl. Math Vol XX. p237–249 (1967)