数理解析研究所講究録
第474巻 1982年 148-154

対称空間の巾零多様体の特異点

都立大理　関口次郎

§1. Introduction

$\mathfrak{g}$ を複素単純Lie環とし θ を $\mathfrak{g}$ の複素線形対合同型とする。　$\mathfrak{k}=\{X\in\mathfrak{g}\,;\,\theta(X)=X\}$, $\mathfrak{p}=\{X\in\mathfrak{g}\,;\,\theta(X)=-X\}$ とおくと $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ は直和になる。今 $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})=\{X\in\mathfrak{p}\,;\,\mathrm{ad}(X)^k=0\ \ (\exists k>0)\}$ とおき, $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ を $\mathfrak{p}$ の巾零多様体、$\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ の元を($\mathfrak{p}$ の)巾零元と呼ぶ。　G を $\mathfrak{g}$ の随伴群, $K_\theta=\{g\in G\,;\,\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{k}=\mathfrak{k}\}$ とすると, K_θ は $\mathfrak{p}$ に作用するが, 特に $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ を不変にしている。

はじめにお断りしておきますが、題名は少し不正確です。この小文では $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ について調べます。

巾零多様体 $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ に関しては Kostant−Rallis [1] が基本的な結果をいくつかだしており, 以下の結果はそれを補完するものです。　$\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ を調べることになった動機は, 対称空間上の帯球函数(これは一般には超函数になる)の解析的性質を調べる為には、$\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ の各 K_θ − 軌道の余接束がでて

くるので，$\mathcal{N}(\mathfrak{p})$ の orbital structure，各 orbit の閉包にあらわれる特異点の性質などを調べることが必要になるからです。

得られた結果は，才一に $\mathcal{N}(\mathfrak{p})$ は一般に既約とは限らないのでその既約成分の個数を決定したこと，才二に $\mathcal{N}(\mathfrak{p})$ の非特異部分の K_θ - orbits の決定，才三に $\mathcal{N}(\mathfrak{p})$ の自然な特異点解消を構成したことです。　$\mathcal{N}(\mathfrak{p})$ の完全な K_θ - orbit structure，$\mathcal{N}(\mathfrak{p})$ の各 orbit の閉包にあらわれる特異点の性質などは残された問題です。

§2．巾零多様体の既約成分

§1 の記号をそのまま使う。　$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ を $\mathfrak{g}$ のひとつの実型，$\mathfrak{k}_{\mathbb{R}}$ をその極大コンパクト部分環とする時，$\mathfrak{k}_{\mathbb{R}}$ の複素化を $\mathfrak{k}$ とすれば，対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ は §1 の例になり，逆に §1 の対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ は常にこのような手続きで得られる。　したがって，その分類は複素単純 Lie 環の実型の分類に帰着される。

K を K_θ の単位元を含む連結成分，$\mathbb{C}[\mathfrak{p}]$ を $\mathfrak{p}$ 上の多項式環，$\mathbb{C}[\mathfrak{p}]^K$ を $\mathbb{C}[\mathfrak{p}]$ の K- 不変式全体のなす部分環とする。　次のことが知られている（cf. [1]）。

(1)　$\mathbb{C}[\mathfrak{p}]^K = \mathbb{C}[P_1, \cdots, P_\ell]$　$(\exists P_i \in \mathbb{C}[\mathfrak{p}]^K$ homogeneous$)$

(2) $\mathcal{N}(\mathfrak{p}) = \{X \in \mathfrak{p};\ P_1(X) = \cdots = P_l(X) = 0\}$

$\dim \mathcal{N}(\mathfrak{p}) = \dim \mathfrak{p} - l$

(3) $\mathcal{N}(\mathfrak{p})$ の K-orbits は有限個である。

(4) $\mathcal{N}(\mathfrak{p})$ の open K_θ-orbit は唯一つである。

(5) $\forall X \in \mathcal{N}(\mathfrak{p})$ に対して $\exists H \in \mathfrak{k}$, $\exists Y \in \mathcal{N}(\mathfrak{p})$ s.t.

$[H, X] = 2X,\ [H, Y] = -2Y,\ [X, Y] = H$

Kostant-Rallis は $\mathcal{N}(\mathfrak{p})$ の open K_θ-orbit $\mathcal{N}(\mathfrak{p})_{pr}$ の元を principal nilpotent element と呼んだ。一方

$\mathcal{N}(\mathfrak{p})_{reg} = \{X \in \mathcal{N}(\mathfrak{p});\ (dP_1)_X, \cdots, (dP_l)_X$ が一次独立$\}$

は $\mathcal{N}(\mathfrak{p})$ の非特異部分である。明らかに $\mathcal{N}(\mathfrak{p})_{pr} \subset \mathcal{N}(\mathfrak{p})_{reg}$ だが両者の関係をもう少し詳しく調べる。はじめに $\mathcal{N}(\mathfrak{p})$ は一般には既約とは限らないのでその既約成分の個数を決定する。それは $\mathcal{N}(\mathfrak{p})_{pr}$ の K-orbits と対応していることに注意する。(K_θ-orbitではない!)

定理1. $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ を§1で定義した対, $\mathcal{N}(\mathfrak{p})$ を $\mathfrak{p}$ の巾零多様体とする。$\mathcal{N}(\mathfrak{p})$ の既約成分の個数を d とする。$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ が下の表I, 表IIに含まれている場合, d はそこに書かれたものである。また表I, II に含まれていない $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ に対しては $\mathcal{N}(\mathfrak{p})$は既約である。

	$(\mathfrak{g},\ \mathfrak{k})$	d
	$(\mathfrak{sl}(2n,\mathbb{C}),\ \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})+\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})+\mathbb{C})$	2
	$(\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}),\ \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})+\mathbb{C})$	2
I	$(\mathfrak{so}(4n,\mathbb{C}),\ \mathfrak{sl}(2n,\mathbb{C})+\mathbb{C})$	2
	$(\mathfrak{so}(n+4,\mathbb{C}),\ \mathfrak{so}(n+2,\mathbb{C})+\mathfrak{so}(2,\mathbb{C}))$	2
	$(\mathfrak{e}_7^{\mathbb{C}},\ \mathfrak{e}_6^{\mathbb{C}}+\mathbb{C})$	2

	$(\mathfrak{sl}(2n,\mathbb{C}),\ \mathfrak{so}(2n,\mathbb{C}))\ (n\geqq 2)$	2
	$(\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C}),\ \mathfrak{so}(n+1,\mathbb{C})+\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}))\ (n\geqq 3)$	2
II	$(\mathfrak{so}(4n,\mathbb{C}),\ \mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})+\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C}))\ (n\geqq 2)$	4
	$(\mathfrak{so}(4n+2,\mathbb{C}),\ \mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})+\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C}))$	2
	$(\mathfrak{so}(4n+k,\mathbb{C}),\ \mathfrak{so}(2n+k,\mathbb{C})+\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C}))\ (k,n\geqq 2)$	2
	$(\mathfrak{e}_7^{\mathbb{C}},\ \mathfrak{sl}(8,\mathbb{C}))$	2

$\mathcal{N}(\mathfrak{p})$の性質(2)より $\mathcal{N}(\mathfrak{p})$ は完全交叉であることがわかるが，$\mathcal{N}(\mathfrak{p})$の各既約成分に対してはどうなっているか。表Iの対$(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$をみると，いずれの場合も $\mathfrak{g}$ の実型 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ で $\mathfrak{k}\cap\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ がコンパクトになるようにえらび，対応するRiemann対称空間をみると，実はそれは複素構造を持つことがわかる。 また $\mathcal{N}(\mathfrak{p})$の各既約成分もやはり完全交叉になっていることも証明できる。 一方，表IIの対$(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$に対

応する $\mathcal{N}(\mathfrak{p})$ の各既約成分は完全交叉にならないことは証明できるが，その定義イデアルの性質については（少なくとも現在の段階では）よくわかっていない。

次に $\mathcal{N}(\mathfrak{p})_{pr}$ と $\mathcal{N}(\mathfrak{p})_{reg}$ の関係について調べる。今 Σ を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ のルート系とする。

定理2. (1) Σ が reduced の時 $\mathcal{N}(\mathfrak{p})_{pr} = \mathcal{N}(\mathfrak{p})_{reg}$。

(2) Σ が reduced でない時 $\mathcal{N}(\mathfrak{p})_{reg} \neq \mathcal{N}(\mathfrak{p})_{pr}$ であり $\forall X \in \mathcal{N}(\mathfrak{p})_{reg} \setminus \mathcal{N}(\mathfrak{p})_{pr}$ に対して

$$(\mathrm{Ad}(G)X) \cap \mathfrak{p} = \mathcal{N}(\mathfrak{p})_{reg} \setminus \mathcal{N}(\mathfrak{p})_{pr}$$

注意. Kostant-Rallis [1] においては $\mathcal{N}(\mathfrak{p})_{pr}$ について詳しく調べているが $\mathcal{N}(\mathfrak{p})_{pr}$ と $\mathcal{N}(\mathfrak{p})_{reg}$ の関係は論及していないようである。

§3. $\mathcal{N}(\mathfrak{p})$ の特異点解消.

単純 Lie 環の巾零多様体の特異点解消は Springer [3] によって与えられているが，この section ではそれの類似が $\mathcal{N}(\mathfrak{p})$ に対しても定義できることを示す。

$X_0 \in \mathcal{N}(\mathfrak{p})$ を principal nilpotent element, $H_0 \in \mathfrak{k}$ $Y_0 \in \mathfrak{p}$ を $[H_0, X_0] = 2X_0$, $[H_0, Y_0] = -2Y_0$, $[X_0, Y_0] = H_0$

となるようにえらぶ（cf. §2）。さて

$$\mathfrak{g}(p)=\{Z\in\mathfrak{g}\,;\,[H_0,Z]=pZ\}\qquad(\forall p\in\mathbb{Z})$$

$$\tilde{\mathfrak{l}}=\sum_{p\geq 0}\mathfrak{g}(p),\qquad \mathfrak{n}_{\mathfrak{p}}=\sum_{p>0}(\mathfrak{g}(p)\cap\mathfrak{p})$$

とおく。そして $\tilde{L}$ を $\tilde{\mathfrak{l}}$ を Lie環とする G の放物型部分群 $L_\theta=K_\theta\cap\tilde{L}$ とする。$K_\theta^s=(K_\theta,K_\theta)$とおくと $L_\theta\cap K_\theta^s$はK_θ^s の放物型部分群であり K_θの中心は L_θ に含まれることから K_θ/L_θ はコンパクトであることがわかる。

任意の $p\in L_\theta$ は $K_\theta\times\mathfrak{n}_{\mathfrak{p}}$に右から作用する。それは $(k,X)\in K_\theta\times\mathfrak{n}_{\mathfrak{p}}$ に対して $(k,X)p=(kp,\mathrm{Ad}(p^{-1})X)$ とすればよい。そして $\tilde{\mathcal{N}}=(K_\theta\times\mathfrak{n}_{\mathfrak{p}})/L_\theta$ とおく。πを $\tilde{\mathcal{N}}$から $\mathcal{N}(\mathfrak{p})$への写像とする。これは $\pi((k,X)L_\theta)=\mathrm{Ad}(k)X$ で定義される。

定理3　$\pi:\tilde{\mathcal{N}}\to\mathcal{N}(\mathfrak{p})$ は $\mathcal{N}(\mathfrak{p})$の特異点解消である。

注意1.　定理3で構成した $\tilde{\mathcal{N}}$ は，単純Lie環の巾零多様体に対する Springer's desingularization の類似である。（cf [3]）

注意2.　定理1で述べたように，$\mathcal{N}(\mathfrak{p})$ は一般には既約でない。したがって $\tilde{\mathcal{N}}$ は連結とは限らない。上の

写像 π によって $\tilde{\mathfrak{N}}$ の連結成分と $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ の既約成分とが対応している。

§4. おわりに

$\mathfrak{N}(\mathfrak{p})$ の各 K- orbit の閉包にあらわれる特異点の性質をしらべることは面白いと思われるが、まだ満足すべき結果を得てはいない。 しかし、この問題は Brieskorn によって得られた rational double points と単純 Lie 環との深い関連の存在 (cf [3]), を考慮すると, 十分意味があるものと期待される。(部分的な結果については 関口 - 清水 [2] 参照)

References

[1] Kostant-Rallis , Amer. J. Math. 93,

[2] Sekiguchi - Shimizu, Proc. Japan Acad.

[3] Slodowy , Springer Lecture Notes. No. 815