数理解析研究所講究録
第475巻 1982年 22-25

有限群の自己同型と指標について

兵庫教大　松山　廣　（Hiroshi Matuyama）

Gを有限群，σをGの自己同型とし，$\Gamma = G\langle\sigma\rangle$（半直積）とおく。又$H = C_G(\sigma)$とし，$h_1 = 1, h_2, \cdots, h_\alpha$を$H$の共役類の代表系とする。さらに，$X(h_i) = \{g^{-1} h_i g^{\sigma} \mid g \in G\}$, $i = 1, 2, \cdots, \alpha$, とおく。特に$X = X(h_1)$とする。

定義　$G = \bigcup_{i=1}^{\alpha} X(h_i)$のとき，$\sigma$を quasi-coprime automorphism of Gという（以下略して，q.c.a と書く）。

q.c.a については，以下の事実が成立する。

(i) $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_t$を$\sigma$の$\Gamma$に於ける共役全体とする。$\sigma$が$G$のq.c.a.である条件は　$G\sigma = \bigcup_{i=1}^{t} C_G(\sigma_i)\sigma_i$となることである。又このとき，和$\bigcup_{i=1}^{t} C_G(\sigma_i)\sigma_i$は disjoint sum となる。

(ii) σの位数とHの位数が互いに素ならば，σはq.c.a.である（逆は成立しない）。

(iii) σをGのq.c.a.とすると，次のことが成立する。

(1) 和$\bigcup_{i=1}^{\alpha} X(h_i)$は disjoint sum である。

(ロ) $\langle\sigma^m\rangle=\langle\sigma\rangle$ となる σ^m も G の g.c.a. である。

(ハ) H の2元が G で共役であるならば、H で共役である。

さて $\mathrm{Irr}_\sigma(G)$ で G の複素既約指標で σ-不変なもの全体のなす集合を表すとする。今、$\mathrm{Irr}_\sigma(G)=\{\chi_1=1,\chi_2,\cdots,\chi_\beta\}$ とおく。Brauer により、β は σ-不変な G の共役類の個数と一致する。σ が g.c.a. のとき、$\alpha=\beta$ が示される。

定義 $\chi\in\mathrm{Irr}_\sigma(G)$ の Γ への拡張 χ^* と $\langle\sigma\rangle$ の生成元 σ^m によって定まる H 上の類函数 $\psi(\chi^*,\sigma^m)$ を $\psi(\chi^*,\sigma^m)(h)=\chi^*(h\sigma^m)$ $(h\in H)$ で定義する。

定義 $\alpha=\beta$ と仮定する。$\mathrm{Irr}_\sigma(G)$ から $\mathrm{Irr}(H)$ への bijection π が次の条件をみたすとき、Glauberman 対応 (w.r.t. σ) という。「$\chi\in\mathrm{Irr}_\sigma(G)$ とする。χ の任意の Γ への拡張 χ^* に対して $\psi(\chi^*,\sigma)$ は、$\pi(\chi)$ のスカラー(0でない)倍である。」

Glauberman は [1] で、$|\sigma|$ と $|G|$ が素なとき(本質的に、$|\sigma|$ と $|H|$ が素なとき) Glauberman 対応の存在を示した。しかし、Glauberman 対応の成り立つ自己同型は次の様に特徴づけられる。

定理A. σ が G の g.c.a. である条件は Glauberman 対応が存在することである。

さらに [1] で示された(作用群が巡回群の場合の)結果のほとんどが、σ が g.c.a. であるという仮定のもとで成立する。

定理B. $\mathfrak{A}$をGのS.C.A.とする。πをGlauberman対応とし$\pi(\chi_i)=\theta_i$, $i=1,2,\cdots,\alpha$とおくと次のことが成り立つ。

(i) χ_iのΓへの拡張χ_i^*で、$\langle\mathfrak{A}\rangle$の生成元のなす集合上で一定値$\varepsilon_i\theta_i(1)$をとるものが一意に存在する。ここで$\varepsilon_i$は$|\mathfrak{A}|$が奇数なら$\pm1$で$|\mathfrak{A}|$が偶数なら1である、$i=1,2,\cdots,\alpha$。

各$\chi_i\in\mathrm{Irr}_{\mathfrak{A}}(G)$に対して、(i)により一意に定まる$\Gamma$への拡張をCanonical extensionということにする。

(ii) $\psi(\chi_i^*,\mathfrak{A}^m)$も$\pi(\chi_i)$の(0でない)スカラー倍である。但し、$\mathfrak{A}^m$は$\langle\mathfrak{A}\rangle$の生成元で、$\chi_i^*$は$\chi_i$の拡張とする。

(iii) $\mathfrak{A}$の位数が素数pの巾とすると、

$$[\chi_i|_H,\ \theta_j]_H \equiv \delta_{ij}\varepsilon_i \pmod{p},\quad 1\le i,j\le\alpha$$

である。但し、δ_{ij}はKroneckerの記号、ε_iは(i)で定まるもの。

(iv) $\chi_i(1)$は$t\theta_i(1)$を割り切る、$i=1,2,\cdots,\alpha$。但し、$t=|G:H|$

(v) χ_i^*をχ_iのCanonical extensionとし、R_i^*をχ_i^*を与えるΓの表現とする、又$R_i=R_i^*|_G$とおく、$i=1,2,\cdots,\alpha$。このとき、

$$R_i(\hat{X}) = \varepsilon_i t\theta_i(1)/\chi_i(1)\ R_i^*(\mathfrak{A}),\quad i=1,2,\cdots,\alpha.$$

が成り立つ。但し、$\hat{X}=\sum_{x\in X}x\in\mathbb{C}[G]$である。

(注意) 定理Bの(i)で定義したCanonical extensionsは、Glauberman [1]の意味でのCanonical extensionsとは必ずしも一致しないが、$\mathfrak{A}$の位数が奇数で$|H|$と素な場合か$\mathfrak{A}$の位数が奇素数のときは一致することが示される。

Gの既約指標がα-不変かどうかは，次の系Cにより判定できる。

系C. χをGの既約指標とする。χがα-不変となる条件は，$\chi(\alpha) \neq 0$となることである。(但し，αはGのq.c.a.とする.)

以上の証明は[2]で発表する予定です。

[1]. G. Glauberman; *Correspondences of characters for relatively prime operator groups*, Canad. J. Math. 20 (1968) 1465–1488.

[2] H. Matsuyama; Quasi-co-prime automorphisms and the Glauberman correspondence of finite groups, preprint.