数理解析研究所講究録
第 475 巻 1982 年 105-116

P群とcorestriction algebras

北大理学部　池田　正　(Tadashi Ikeda)

M. Broué, L. Puig は誘導加群を環論的に一般化して corestriction algebra を導入し、いくつかの応用を与えている([2] [5])。これらの基礎は M. Broué によるイリノイ大の講義としてまとめられているが、邦語では津島[6]による簡潔な紹介がある。ここでは次の誘導加群と block に関する D. Burry の結果(定理2.1)を corestriction algebra たまで拡張することを目標とする。

1. interior G-algebra と corestriction algebara

記号は以下の通りとする。

$(\mathcal{O}, \mathfrak{m})$: complete discrete valuation ring with maximal ideal $\mathfrak{m}$

$k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$: characteristic $p > 0$

$R = \mathcal{O}$ 又は k

$B(e)$: G の p-block で e がその central primitive idempotent

$D(B)$: B の defect group

定義　Aを有限生成R-algebraとし，R-algebra homomorphism

$\rho: RG \longrightarrow A$　が与えられた時，A_ρをinterior G-algebraとよぶ．

定義　B_ρをinterior RH-algebra（但し $H \leq G$）とした時．

$$A = RG \otimes_{RH} B \otimes_{RH} RG$$

$$(積)\ (g_1 \otimes b \otimes g_2^{-1})(g_1' \otimes b' \otimes g_2'^{-1}) = \begin{cases} 0 & g_2H \neq g_1'H のとき \\ g_1 \otimes b \cdot \rho(g_2^{-1}g_1')b' \otimes g_2'^{-1} & g_2H = g_1'H のとき \end{cases}$$

$$\rho_H^G(x) = \sum_{g \in [G/H]} xg \otimes 1 \otimes g^{-1}$$

（但し．$g_1, g_2, g_1', g_2', x, \in G$　$b, b' \in B$
$[G/H]$ は G の H による left coset の代表系）

とおくと interior G-algebraを作る，これを B_ρ の corestriction algebraとよび（$\mathrm{Cor}_H^G B$, ρ_H^G）で記す．

interior G-algebra, corestriction algebraの性質は洋島［ ］にゆずるが．加群との関係は，それは丁度．MをRG-加群としたとき，$A = \mathrm{End}_R(M)$

$\rho: RG \longrightarrow \mathrm{End}_R(M)$：表現とおくと　A_ρはinterior G-algebraになり

$H \leq G$に対して　MをRH-加群とし　$\mathrm{Cor}_H^G(\mathrm{End}_R(M))\ \rho_H^G$ が，

$\mathrm{End}_R(M^G)_{\rho'}$（$\rho'$は$M^G$の表現）と同型となることである（［ ］example 3）

なおその他の記号は洋島［ ］に従い次の様にする．

A_ρをinterior G-algebraとしたとき

$H \leq G$ に対し　$A^H = \{a \in A \mid \rho(h^{-1})a\rho(h) = a \text{ for } \forall h \in H\}$

$H \leq K \leq G$ に対し　$\mathrm{Tr}_H^K:\ A^H \longrightarrow A^K$

$$a \longmapsto \sum_{k \in [H \backslash K]} a^k = \sum_{k \in [H \backslash K]} \rho(k^{-1})a\rho(k)$$

$Tr_H^K(A^H) = A_H^K$ とし．A_H^K は A^K の両側 ideal になる．

$P \le G$: p-部分群とし $I^P(A) = \sum_{Q \lneq P} A_Q^P + \mathfrak{J} A^P$ とすると $I^P(A)$ は A^P の両側 ideal となる．この時，標準写像

$$A^P \longrightarrow A^P/I^P = A(P)$$

を Br_P で表し P による Brauer homomorphism と呼ぶ．

$H \le G$ とし．B_ρ を interior H-algebra とし．$A = Cor_\rho^G B$ とする．今，$g, g' \in G$ に対し $e_{gg'} = g \otimes 1 \otimes g'^{-1}$ で表すと．

$$\{e_{gg'} \mid g, g' \in [G/H]\}$$

は A の R-基底をなし．$g, g', h, h' \in [G/H]$ に対し

$$e_{gg'} \cdot e_{hh'} = \delta_{g'h}\, e_{gh'} \quad (\delta_{g'h} : \text{Kronecker の記号})$$

が成立する．

以下，interior algebra, corestriction algebra のいくつかの性質を述べておく．

(1-1) $H \le G$ で．B_ρ．$B'_{\rho'}$ を2つの interior H-algebras で $\ker\rho \subset \ker\rho'$ が成立すると仮定すると $\ker\rho_H^G \subset \ker\rho'^G_H$ が成立する．更に ρ が injection ならば ρ_H^G も injection になる．

(証明) 以下．G の元 g に対し $g = \bar{g}\underline{g}$ ($\bar{g} \in [G/H]$ $\underline{g} \in H$) と表すことにする．今 RG の元 $x = \sum_{g \in G} a_g \cdot g$ が $\rho_H^G(x) = 0$ を満たしていると仮定する．定義に従って次の式が成立する．

$$\rho_H^G(x) = \sum_{g \in [G/H]} \sum_{h \in [G/H]} \Big(\sum_{y \in H} a_{ghy\underline{g}^{-1}}\, \rho(\underline{gh}\, y) \Big) e_{\overline{gh}, g}$$

$$= 0$$

ところが. $g, h \in [G/H]$ に対し $e_{gh, g}$ はすべて異なっているから. $\mathrm{Cor}_H{}^G B$ の基底をなす. よってすべての $g, h \in [G/H]$ に対し

$$\sum_{y \in H} a_{ghyg^{-1}}(\rho(\underline{gh}\cdot y)) = \rho\Big(\sum_{y \in H} a_{ghyg^{-1}}\underline{gh}\cdot y\Big) = 0$$

が成立し $\ker\rho \subset \ker\rho'$ より

$$\sum_{y \in H} a_{ghyg^{-1}}\rho'(\underline{gh}\cdot y) = 0$$

となり、逆にたどって $\rho'(x) = 0$ がいえ証明される ॥

次の例も後に利用される

(1-2) $P \triangleleft G$: p-群, $\rho_0 : RP \longrightarrow R$: augmentation map とし.

$(\mathrm{Cor}_P{}^G R, \rho_{0P}{}^G)$ を作ると. RG の任意の centrally primitive idempotent e に対し $\rho_{0P}{}^G(e) \neq 0$ となる.

(証明) $(\mathrm{Cor}_P{}^G R)^G \cong R[G/P]$ となり natural map $G \longrightarrow G/P$ から作られる RG から $R[G/P]$ への準同型を τ とすると上の同型を通して

$$\tau\big|_{Z(RG)} = \rho_{0P}{}^G\big|_{Z(RG)}$$

が成立する. 一方 $\ker\tau \subset J(RG)$ より容易に示される ॥

<u>定義</u> A_ρ, $A'_{\rho'}$ を interior G-algebras とし. A'^G の巾等元 e' に対し.

$$\begin{array}{rccc} \rho'^{e'} : & RG & \longrightarrow & e'A'e' \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & e'\rho'(x) \end{array}$$

とすると $(e'A'e', \rho'^{e'})$ は再び interior G-algebra となる. ここで A_ρ と $(e'A'e')_{\rho^{e'}}$ が同型な時. A_ρ は $A'_{\rho'}$ に direct embed されていると呼ぶ.

<u>定義</u> A_ρ を interior G-algebra とし, $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ とする. この時

・$A^\sigma = A$ (基礎の algebra は同じ)

・$$\begin{array}{cccc} \rho^\sigma : & RG & \longrightarrow & A^\sigma \\ & \cup & & \cup \\ & g & \longmapsto & \rho(g^{\sigma^{-1}}) \end{array}$$

とすると 新しい interior G-algebra (A^σ, ρ^σ) が定義される.

次の2つの補題は容易に示される

(1-3) A_ρ, $A_{1\rho_1}$, $A_{2\rho_2}$ を3つの interior G-algebras とし, α_i を A_ρ を $A_{i\rho_i}$ 内に direct embed する homomorphism $(i=1,2)$ とする. この時 A_1^G 内に原始巾等元 e_1, A_2^G 内に原始巾等元 e_2 があって, e_1, e_2 のそれぞれの defect group ([6] の [1.8] 参) は同じである.

(1-4) A_ρ: interior G-algebra, $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ としたとき, $A^G = (A^\sigma)^G$ となり, A^G の原始巾等元 e に対し e の $(A^\sigma)^G$ 内での defect group は D を e の defect group として, D^σ となる.

2. p-群と corestriction algebras

1. の準備を用いてこの小論の目標である D. Burry の結果の拡張とその証明をこの節で与える.

<u>定理 2.1</u> (D. Burry) P を G の p-部分群, U を vertex が P となる直既約 kG-加群と仮定する. この時 defect group が P を含む G の任意の block B に対し U^G の直既約直和因子で B に属しかつ vertex が P となるものが存在する.

これを corestriction algebra に拡張すると次の様になる

定理 2.2　PをGのp-部分群．B_Pは interior P-algebra とし．B^P は local で．B^P の原始巾等元1の defect group は P と仮定する．この時．B_P の corestriction algebra を $(\mathrm{Cor}_P^G B\ \ \rho_P^G)$ とし．defect group が P を含む任意の RG の centrally primitive idempotent e に対し $\rho_P^G(e)\neq 0$ となり．更に $\rho_P^G(e)=f_1+f_2+\cdots+f_\ell$ と $(\mathrm{Cor}_P^G B)^G$ 内で直交原始巾等元分解をすると、ある f_i に対し f_i の defect group は P となる．

証明は次の形に書き直しておこなう

定理 2.3　定理 2.2 の仮定のもとで corestriction algebra $(\mathrm{Cor}_P^G B\ \ \rho_P^G)$ の P に係る Brauer homomorphism を $Br_P:(\mathrm{Cor}_P^G B)^P\longrightarrow(\mathrm{Cor}_P^G B)(P)$ とし．defect group が P を含む任意の RG の centrally primitive idempotent を e とすると　$Br_P\circ\rho_P^G(e)\neq 0$　が成立する．

((2.2)と(2.3)の同値性の証明)　Brauer homomorphism による defect group の特徴付け([E]の(1.8))と Higmann の criterion の corestriction algebra への拡張 ([I] ChII (2.7)) を用いて容易に示される．//

以下．(2.3)をまず $P\triangleleft G$ の場合示し．一般の場合を証明する．そのため(2.3)の証明が完結するまで次の記号を用ることにする．

P: Gのp-部分群．

B_P: interior P-algebra で Th2.2 の仮定を満たしているもの

$(A\ ,\ \rho_P^G)=(\mathrm{Cor}_P^G B\ ,\ \rho_P^G)$: Bの corestriction algebra

e: defect group が P を含む RG の centrally primitive idempotent.

$Br_P: A^P\longrightarrow A(P)$: (A,ρ_P^G) の Brauer homomorphism

(2.4)　$P \triangleleft G$とし，fをA^Gの原始巾等元とすると，fの defect group は必ずPとなり特に$Br_P(f) \neq 0$となる．

(証明)　$A = \mathrm{Cor}_P^G B$内で　$e_{11} = 1 \otimes 1 \otimes 1$，$\rho_P^G(g^{-1}) e_{11} \rho_P^G(g) = e_{11}{}^g$　と記すと$P \triangleleft G$より　$e_{11}{}^g \in A^P$　$(g \in G)$　が成立する．更にe_{11}がA^Pの原始巾等元より　$e_{11}{}^g$もA^Pの原始巾等元となる．(1.4)を用いて$e_{11}{}^g$のA^Pでの defect group はPとなる．次にfの defect group をDとおくと，容易に$D \leq P$がいえる．今$|D| \neq |P|$と仮定する．$f \in A^G \subset A^P$よりfをA^P内で直交原始巾等元分解するとその分解内にA^Pでの defect group がDとなるものが現れる．一方A^Pの原始巾等元の defect group はすべてPとなるからこれは$|D| \neq |P|$に矛盾する．//

(2.5)　$P \triangleleft G$のとき定理2.3は正しい．

(証明)　diagram　　$R[G]^G \xrightarrow[\rho_P^G]{} A^G \xrightarrow[Br_P]{} A(P)$　　において，$Br_P \circ \rho_P^G(e) \neq 0$を示せばよい．(2.4)より$\rho_P^G(e) \neq 0$を示せばよい．ところが(1.2) (1.1)を用ると，$\rho_P^G(e) \neq 0$が示される．//

次に一般の場合を示すが，次の補題は Green の transfer 定理の類似で有益である．

(2.6) (Green [4] 参照．)　$N = N_G(P)$とし，B_Pの corestriction algebra $(\mathrm{Cor}_P^N B, \rho_P^N)$を$(\tilde{A}, \rho_P^{\wedge})$と記すことにする．このとき interior N-algebra として$A(P)$と$\tilde{A}(P)$は同型になり，特に$A(P)^N$と$\tilde{A}(P)^N$は algebra として同型になる．

(証明)　A^G内で1を次のように直交原始巾等元分解する

$$1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_r + e_{r+1} + \cdots + e_n$$

但し、 e_i の defect group $(D(e_i))$ $\begin{cases} \underset{G}{=} P & i = 1, 2, \dots, r \\ \underset{G}{\neq} P & i = r+1, r+2, \dots, n \end{cases}$

$A^G \subset A^N$ より e_i を更に A^N 内で直交原始巾等元分解しておく。

$$e_i = f_{i1} + f_{i2} + \cdots + f_{in_i}$$

[6] 1.9 の論法を用いて、$1 \leq i \leq r$ に対して、

"f_{i1} の defect group が P で f_{ij} の defect group が P より真に小さい ($j = 2, 3, \dots, n_i$)"

と仮定してよい。ここで

$$f = f_{11} + f_{21} + \cdots + f_{r1}$$

とおくと f は A^N の巾等元となり $1 - f \in I^P(A) = \sum_{Q<P} A_Q^P + \mathfrak{m}A^P$ となる。

一方 $fAf \oplus fA(1-f) \oplus (1-f)Af \oplus (1-f)A(1-f) = A$ より 上のことから

$$fAf(P) \cong A(P) \quad (\text{interior } N\text{-algebra として})$$

が示される。一方 $\tilde{A}^N$ 内で 1 を直交原始巾等元分解する。

$$1 = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 + \cdots + \tilde{f}_s + \tilde{f}_{s+1} + \cdots + \tilde{f}_m$$

但し、 $\tilde{f}_i$ の defect group $(D(\tilde{f}_i))$ $\begin{cases} \underset{N}{=} P & i = 1, 2, \dots, s \\ \underset{N}{\neq} P & i = s+1, \dots, m \end{cases}$

全く同様にして、$\tilde{f} = \tilde{f}_1 + \cdots + \tilde{f}_s$ として

$$\tilde{f}\tilde{A}\tilde{f}(P) \simeq \tilde{A}(P) \quad (\text{interior } N\text{-algebra として})$$

が成立する。

今 $(A, \mathcal{P}_P^G)$ を N に制限したものを $(\mathrm{Res}^G_N A, (\mathcal{P}_P^G)_N)$ とする。また

A 内で $e_{gg'}=g\otimes 1\otimes g^{-1}$ $(g, g'\in[G/p])$ を考え、$\tilde{A}$ 内で $\tilde{e}_{gg'}=g\otimes 1\otimes g^{-1}$ $(g, g'\in[N/p])$ を考える。

$$\begin{array}{cccl} \beta: & \tilde{A} & \longrightarrow & \mathrm{Res}^G_N A \\ & \cup & & \cup \\ & \tilde{e}_{gg'} & \longmapsto & e_{gg'} \qquad (g, g'\in[N/p]) \end{array}$$

とすると β は $(\tilde{A}, \rho_p^N)$ を $(\mathrm{Res}^G_N A, (\rho_p^G)_N)$ へ direct embed する。更に $\beta(1)=\mathrm{Tr}_p^N(e_{11})$, $\beta(\tilde{f})=f$ が成立して、$(\tilde{f}\tilde{A}\tilde{f}, (\rho_p^N)^{\tilde{f}})$ と $(fAf, (\rho_p^G)^f)$ は interior N-algebra として同型になる。よって完全に証明された。//

この補題を用いて一般の場合の定理 2.3 を証明する。

(定理 2.3 の証明) G における P による通常の Brauer homomorphism を s とし、$N=N_G(P)$ $C=C_G(P)$ とする。このとき定義より次の homomorphism ρ_P が存在する。

$$\begin{tikzcd} R[G]^P \arrow[r, "\rho_P^G"] \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A^P \arrow[d, "\mathrm{Br}_P"] \\ R[C]^N \arrow[r, "\rho_P"] & A(P)^N \end{tikzcd}$$

同様に次の diagram を作れる

$$\begin{tikzcd} R[N]^P \arrow[r, "\rho_P^N"] \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \tilde{A}^P \arrow[d, "\mathrm{Br}_P"] \\ R[C]^N \arrow[r, "\tilde{\rho}_P"] & \tilde{A}(P)^N \end{tikzcd}$$

ところが (2.6) の $A(P)^N$ と $\tilde{A}(P)^N$ との同型写像を β とおくと、次の diagram が可換になる。

$$
\begin{tikzcd}
R[G]^G \arrow[rr, "\rho_p^G"] \arrow[d, "s"'] & & A^G \arrow[d, "Brp"] \\
& & A(p)^N \\
R[G]^N \arrow[rru, "\rho_p"] \arrow[rr, "\tilde{\rho}_p"'] \arrow[d, dotted, shift left, "\tau"] & & \tilde{A}(p)^N \arrow[u, "\wr\ \beta"'] \\
R[N]^N \arrow[u, shift left, "s'"] \arrow[rr, "\rho_p^N"'] & & \tilde{A}^N \arrow[u, "Brp"']
\end{tikzcd}
$$

更に τ を $R[G]^N$ から $R[N]^N$ への包含写像とすると $Brp\circ\tau = id$ となる。

(2.5) より $Brp\cdot\rho_p^N(e') \neq 0$. (但し e' は RN^N の原始巾等元) が成立する。

今 $e' = \tau\circ s(e)$ とおくと

$$Brp\,\rho_p^N(e') \neq 0$$

より上の可換性から

$$\tilde{\rho}_p\, s(e) \neq 0$$

よって $\qquad \rho_p\cdot s(e) = Brp\,\rho_p^G(e) \neq 0 \qquad$ が示されて完全に証明された. ||

3. 応用

1 で注意した interior G-algebra と RG-加群の関係を用ると、容易に、定理 2.2 から定理 2.1 を導くことができる。更に（$\mathcal{O}$の商体）K が代数閉体の時、定理 2.2 はもう少し拡張することができる。

系3.1　$\mathcal{O}$の商体Kが代数的閉体とし、PをGのp-部分群、B_Pをinterior P-algebraでB^Pがlocal、B^Pの原始巾等元1のdefect groupが$Q \le P$と仮定する。この時B_Pのcorestriction algebraを$(\mathrm{Cor}_P^G B, \rho_P^G)$, defect groupがQを含む任意のRGのcentrally primitive idempotentをeとすると、$\rho_P^G(e) \neq 0$となり更に$\rho_P^G(e) = f_1 + \cdots + f_\ell$と$(\mathrm{Cor}_P^G B)^G$内で直交原始巾等元分解すると、ある$f_i$に対し$f_i$のdefect groupはQとなる。

(証明) Higmannのcriterionのcorestriction algebraへの一般化とGreenの定理のcorestriction algebraへの一般化([1] ChII. 3.7 又は[6](2.9)参)を用いてあるinterior Q-algebra B'_PでB'^Qはlocal、B'^Qの原始巾等元1のdefect groupがQとなるものがあって、B_Pは$(\mathrm{Cor}_Q^P B', \rho'^P_Q)$とinterior P-algebraとして同型になることがわかる。よって、$(\mathrm{Cor}_P^G B, \rho_P^G)$と$(\mathrm{Cor}_Q^G B', \rho'^G_Q)$はinterior G-algebraとして同型になるから定理2.2が適応される。//

従って、定理2.1を導いた方法と全く同様にして、次の系をえる。

系3.2　$\mathcal{O}$の商体Kが代数的閉体とし、PがGのp-部分群、UをvertexがQ≤Pとなる直既約RP-加群と仮定する。この時、defect groupがQを含む任意のGのblock Bに対し、U^Gの直既約直和因子でvertexがQとなりかつBに属しているものが存在する。

更に系3.2に於いて、RをKに係数拡大することによって、KG-加群の場合へも拡張することができ次の系をえる。

系3.3　$\mathcal{O}$の商体KがSplitting fieldとし、Wを既約kP-加群で Bをdefect groupがPを含むGのブロックとする。この時W^Gの既約因子でBに属しているものが必ず存在する。

（参考文献）

[1] M. Broué, Illinois Univ. での講義録

[2] M. Broué and L. Puig, Character and local structure in G-algebras, J. Alg. 63 (1980), 306-317

[3] D. Burry, The distributions of modular representations into blocks, Proc. of. A. M. S. 78 (1980), 14-16

[4] J. A. Green, A transfer theorem for modular representations, J. Alg. 1 (1964), 73-84

[5] L. Puig, Sur theoreme de Green, Math. Z. 166 (1979) 117-129

[6] 津島行男, modular表現の現状と問題, 数理研考究録 429 (1981), 22-36