

高木関数とその一般化について

京大理・数 畑 政義 (Masayoshi Hata)

京大理・数 山口 昌哉 (Masaya Yamaguti)

高木貞治は、1903年に、連續ながらついたるとは3微分不可能な関数の例を発表した。その様な関数の例としては、
すばに Weierstrass が 1872 年に発見してあるのが、
Weierstrass の例は、lacunary Fourier 級数の形で与えられ
その微分不可能性の証明も、めらかでも容易ではない。そ
れに反して、高木の例の方は、定義そのものが geometrical
であり、その微分不可能性の証明も、以下、2簡単であり、
筆者らの知る限りにおいて、最も簡単な例の様である。

ここでは、その高木関数、あるいは、その一般化を中心
関数を持つ、数々の興味深い性質を明らかにしていきたい。

§ 高木関数 $T(x)$.

高木貞治の牛之子例といふのは、次の様に 12 定義出す。

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} p(2^n x).$$

たゞし、 $p(x)$ は実軸上の周期 2 の piece-wise linear 関数で、正確には、

$$p(x) = \left| x - 2 \left[\frac{x+1}{2} \right] \right|.$$

である。 $[y]$ は実数 y の整数部分を表す記号とする。

$p(x)$ のグラフは、Fig. 1 の様である。次に $\frac{1}{2} p(2x)$ のグラフを考へれば、これが $p(x)$ の周期を半分にし、かつ高さを半分にしたものであるから。

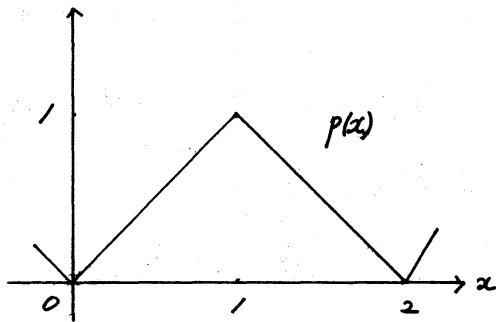


Fig. 1.

そのグラフは、Fig. 2 の様になる。この様に 12. 一般に関数 $\frac{1}{2^n} p(2^n x)$ は、傾き ± 1 のギザギザの関数である。高木関数は、これら無限個の和で表わされるものである。

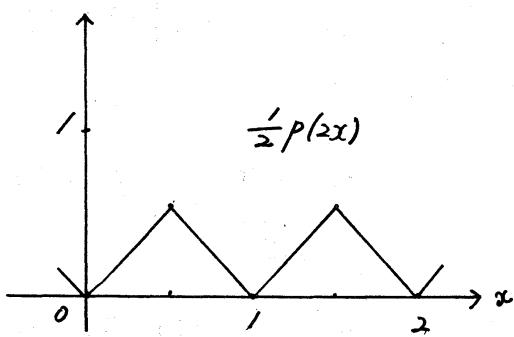


Fig. 2.

高木関数のこうした簡単な構造が、 $T(x)$ のいたるところの微分不可能性を示す際に役立つことはある。

12. ここで比較のために、Weierstrass の関数 $W(x)$ を考えよう。丁度 $T(x)$ に対応する Weierstrass の関数は、次の

のようにもとめてある。

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(\pi 2^n x).$$

実際には、この関数の微分と二重の微分不可能性は、1916年G.H. Hardyによつて示された。

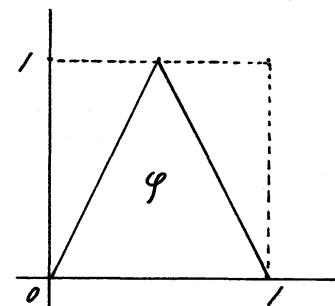
ただし、 $T(x) < W(x)$ の違いは、周期関数 $p(x) < \cos \pi x$ の違いのみであることがわかる。ともに、ある一つの周期関数を基本に1つ、それらの倍周期のものをどんどん積み重ねて出来てゐるといふ点で共通である。

次に、見方を変えて、次の様な簡単な一次元力学系 φ を導入しよう。

$$\varphi(x) = \left| 2x - 2 \left[x + \frac{1}{2} \right] \right|, \quad x \in [0,1]$$

ここで、

$$\underbrace{\varphi^n}_{m\text{個}} = \varphi \circ \cdots \circ \varphi, \quad \varphi^0 = \text{Id}$$



と約束すれば、 $T(x), W(x)$ は、 $\cong \varphi$

を用ひて、次の様に表せできることが

わかる。

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi^n(x), \quad W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos \pi \varphi^n(x).$$

両者ともに φ は generator とすと母関数の形が表示される。

ことに注意可。もう1つの注意と12. $\pi(x)$ の方は。

8)の generator $\varphi_0(x) = 4x(1-x)$ を用ひ2.

$$\pi\left(\frac{2}{\pi} \sin^{-1}\sqrt{x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi_0^n(x)$$

と表かれる。 $\varphi(x)$ と $\varphi_0(x)$ とは 位相共役の関係にあることを知らぬ2)。

de Rham は 1957 年に $T(x) \in \pi(x)$ が、ともに次の様な関数方程式の解であることを注目してゐる。

$$F(x) - \frac{1}{2} F(2x) = g(x). \quad x \in \mathbb{R}.$$

ただし、高木の場合 $g(x) = p(x)$, Weierstrass の場合は $g(x) = \cos \pi x$ である。de Rham 以後、平面上の不整曲線の方に興味を移り2)したの2)。この方面での発展は見られてゐる。

先に導入した φ を用ひれば、 $T(x), \pi(x)$ は、ともに、次の様な関数方程式の解であることがわかる。

$$F(x) - \frac{1}{2} F(\varphi(x)) = g(x), \quad x \in [0, 1]$$

ただし、高木の場合 $g(x) = x$, Weierstrass の場合は $g(x) = \cos \pi x$ である。この関数方程式は 12 回、筆者たちによく研究[1]がある。

§ 高木関数の一般化.

前節の φ を用いた高木関数の表現に関連して、単位区間上の連続関数の部分集合 E_0 を次の様に定め子の如き自然である。

$$E_0 = \left\{ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi^n(x) ; \sum a_n \text{ は絶対収束する級数} \right\}$$

E_0 は $[0, 1]$ の閉部分空間となる。特に、

$$\tilde{T}(x) = T(x) - x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi^n(x), \quad x \in [0, 1]$$

であるから、 E_0 は、 $\cup E_0$ と二つの微分不可能な元を含んでゐるし、また $[1]$ を示すかのように、

$$x(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \varphi^n(x), \quad x \in [0, 1]$$

であるから、せめらかに関数も含んでゐる。以下、 $\cup E_0$ の例を用ひて、歴史上、特異な連続関数の例といたずらに E_0 の元が、たゞ下記用ひられてゐたことが、かかるところである。

例 1. (Faber, 1907).

(1) が 3 指数の Lipschitz 条件をも満たさない連続関数の一例といたずらに E_0 の元を手に入れる。

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \varphi^{(n)}(x).$$

というのと、 $\alpha f(x)$ に対し、次の評価が成り立つからである。

$$|f(x+h) - f(x)| \neq O\left(\frac{1}{|\log |h||}\right).$$

例 2. (Kahane, 1959).

Kahane は、modulus of continuity $w(f)$ が、ある与えられた条件を満たす様な例を構成するのに、次の lacunary 高不関数とも言える E_0 の元で利用した。

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \varphi^{(j)}(x), \quad n_1 < n_2 < \dots$$

Landsberg (1908) が注意した様に、周期関数と 12 で E は $\varphi(x) = p(2x)$ は、次の様な Fourier 展開である。

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k:\text{奇}} \frac{1}{k^2} \cos 2\pi kx.$$

したがって、任意の $f \in E_0$ 、 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi^{(n)}(x)$ は式 12 の

$$f(x) = -\frac{4}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos 2\pi mx.$$

である。 $A_0 = -\frac{\pi^2}{8} \sum a_n$, $A_m = \frac{a_m}{k^2}$ ($m = 2^{n-1}k$, $k: 奇}) である。$

すると、自然に複素高不関数 T_a そのものが定義される。

$$T_a(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^n k^2} z^m, \quad m = 2^{n-1} K, \quad k \text{ 奇}$$

明らかに T_a は $|z| \leq 1$ で収束する。したがって、

$$\operatorname{Re} T_a(e^{2\pi i \theta}) = c_1 \tilde{T}(\theta) + c_2$$

という風に、何らかの定数 $c_1 \neq 0, c_2$ を用いて、表記される T_a が $|z| \leq 1$ で \tilde{T} と c_2 を満たすことがわかる。

$$T_a(z) - \frac{1}{2} T_a(z^2) = \int_0^z \frac{1}{4f} \log \frac{1+z}{1-z} dz.$$

石垣は、初等関数 z は表記ではないことに注意しておく。

しかし、対応する Weierstrass 関数 W_a は $|z| \leq 1$ で

$$W_a(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^{2^m}, \quad |z| \leq 1$$

であり、 W_a は次の関数方程式を満たす。

$$W_a(z) - \frac{1}{2} W_a(z^2) = \frac{1}{2} z^2.$$

以上によると、高不関数は lacunary 和 Fourier 級数で表記される Weierstrass の種類のことは、本質的に違う型の関数 z と z^2 とが重なる z である。

定理.

φ の値が E ($C[0,1]$ の部分 Banach 空間) に
属する若干の性質を述べよう。

定理. 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi^n(x)$ が各点 $x \in [0,1]$ で収束 (2)
とする。そのとき φ 是然的 $\Rightarrow \sum c_n$ は绝对収束する。す
べて、その時

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi^n(x) \in E.$$

が成立し、 u 上無関係な正定数 K が存在 (2).

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \leq K \|u\|.$$

が成立する。 $\|\cdot\|$ は通常の sup-norm である。

この定理の証明は、[2] を見よ。以下 E < と (2). この証
明の要点は、 φ が一次元力学系 (2) の、次の著しい諸性
質 \Rightarrow 本質的に依存 (2) とは注目 (2) 繰り。

(i) 任意の symbol 列 $w = (w_0, w_1, w_2, \dots) \in \{A, B\}^{\mathbb{N}}$, i.e.

$w_j = A$ or B は決し、ある初期値 $x_0 \in [0,1]$ が取れ。各 $n \geq 0$
は決し。

$$\varphi^n(x_0) \in w_n.$$

E は $A = [0, \frac{1}{2}]$, $B = [\frac{1}{2}, 1]$ とその逆像同一視 (2).

(ii). critical 点 $x=\frac{1}{2}$ (i.e. $A \in B$ の共通点) の性質 =
初期値 x と比べ、 $A \in B$ の “可逆性” の性質 = $\|x\|_2$ も長
い時間とどき、 2つの二つが一致す。

以上の 2 点が、 2 つ重要な点の 2 つ。 \therefore 定理 2.
次の様に一般化できます。

定理': $g(x) \in [0, 1]$ とし、 次の不等式を満たすとす
る。

$$(x - \frac{1}{2}) \{ g(x) - g(\frac{1}{2}) \} > 0, \quad x \neq \frac{1}{2}.$$

このとき、 級数

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g(\varphi^n(x))$$

1. 各点 $x \in [0, 1]$ で収束し、 2. $\|u\|_2$ $\leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ が絶対収束である
3. $|g| \geq \alpha > 0$ が存在する。 正定数 $K_g > 2$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \leq K_g \|u\|_2.$$

が成り立つ。

定理' の証明も、 [2] を見よ。 下記を下す。

注意. 前定理の lacunary Fourier 級数は関子。

Sidon の定理と類似 12 の子と竟何が以下の方もぶら下子と思
う。 実際、定理' は 12. $g(x) = -\cos \pi x$ とおき $\omega = \pi$ とす
れど、Sidon の定理の特別の場合を証明することができる。

この様に 12. E_0 の $\pi f(x) = \sum a_n \varphi^n(x)$ a 表示は 12 の
係数 $\{a_n\}$ と、Fourier 係数とす。類似 12 の子と竟子と
が成る。 実際、Fourier 係数は関 12 は、その減少の割
合と、その Fourier 級数の表の不関数のそれらが工には、密
接な関係があるから下子とも、我々の場合は 12 も、そ
れに対応して次の結果が成る。

定理. (Faber, 1910).

$f \in E_0$ 且 12 一点で可微分 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n = 0$.

この定理の Fourier 級数版は、Freud の定理である。

したがって、この定理の逆と 12. 次の結果が得られる。

定理. (Kôno, 1983).

$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n = 0 \Rightarrow f \in E_0$ の微分可能な点の集合は、
連続濃度でもつ。

最後に, $f(x)$ a graph a Hausdorff 次元 $\text{Dim}(f) = 1$ か 2 か?
Besicovitch-Ursell,(1937) の結果があ, 2. 我々の場合だと.

$$f_\delta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\delta 2^n}} \varphi^{2^n}(x), \quad 0 < \delta < 1$$

たとえば \exists_0 の元 f_δ は $\exists 1$ か $\exists 2$ か. $\text{Dim}(f_\delta) = \frac{1}{1+\delta}$ とです.
あはれで, $n < \ell$ も, φ a Hausdorff 次元が 2 か $\exists 1$ か \exists_0 の元
が存在するかある. したがって, φ の関数の graph a
Hausdorff 次元が 2 か \exists_0 線は連続関数を構成するともいえ
る. また, もっと簡単な \exists_0 の元.

$$f_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s^n \varphi^n(x), \quad 0 < s < 1$$

$\exists 1$ か $\exists 2$. $\text{Dim}(f_s) = 2 - \log_2 \frac{1}{s}$ とありますうなと x^n . 予
想工場 2 の子供. φ の証明は, なかなか難しく, まだ出来
ないです。

§ 差分方程式と関数方程式.

関数方程式について, これまでにも, 向回が登場(2)
(1)子供. もともと \exists_0 を考へて, たりと, \exists_0 か, \exists_1 か. 次の
様で, 差分方程式系を考へてから \exists_0 か \exists_1 か, だ.

$$(*) \begin{cases} u\left(\frac{i}{2^{n-1}}\right) + u\left(\frac{i+1}{2^{n-1}}\right) - 2u\left(\frac{2i+1}{2^n}\right) = c_n, & 0 \leq i \leq 2^{n-1}-1, \quad n \geq 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

結論から言えば、この無限個の差分方程式系 (*) が、連続解を持つための必要十分条件は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$$

である。この証明は、前節の最初の定理と、それが
1. 連續関数に対する Schauder 展開を用ひて行なわれた。
また、解があることを示す、一意的であることを、重心に分か
る。例えば、 $c_n = -2 \cdot \frac{1}{2^n}$ とすれば $u(x) = \tilde{T}(x)$ 。また、
 $c_n = -2 \cdot \frac{1}{4^n}$ とすれば $u(x) = \alpha(1-x)$ を得る。である。

この差分方程式は、central 差分の型であることを注意してみると、したがつて、2. の意味で (4) は、Poisson 方程式 $\Delta u = \text{定数}$ の差分化なのである。とくに、丁度、

$c_n = -2 \cdot \frac{1}{4^n}$ の時である。この差分方程式は、微分方程式 $\Delta u = -2$ の固有値となつて、2. Dirichlet 条件を満たす。したがつて解。

$\alpha(1-x)$ が現れるといふ場合である。

差分方程式を少し変形して、次の線性方程式系 (**) を考えよう。

$$(**) \quad \begin{cases} u\left(\frac{2i+1}{2^n}\right) = (1-\alpha)u\left(\frac{i}{2^{n-1}}\right) + \alpha u\left(\frac{i+1}{2^{n-1}}\right), & 0 \leq i \leq 2^{n-1}-1, n \geq 1. \\ u(0)=0, \quad u(1)=1 & (\alpha \text{は定数}). \end{cases}$$

この外、丁度、微分方程式との対応と言えば、 $\Delta u =$
移流項 $\frac{dy}{dx}$ の付いた方程式の差分化に对应する子と見
いふよ。

この無限個の差分方程式が一意的連続解を持つため
の必要十分条件は、 $0 < \alpha < 1$ のとき。 $\alpha = \frac{1}{2}$ のとき
は、丁度、central 差分の場合の「因子」。だから方程解
 $u(x) = x$ が存在する。更に、この外の場合は、
2. $\alpha \neq \frac{1}{2}, 0 < \alpha < 1$ の場合、解 $u(x)$ は、特異な閏数にな
る。この2つある。

手前、問題 (**) は、次の de Rham の閏数方程式と同値で
あることを示す。

$$\begin{cases} U(x) = \alpha U(2x) & , 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ U(x) = (1-\alpha)U(2x-1) + \alpha & , \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

de Rham 自身は、上の閏数方程式は、平面上の不変曲線
の研究と2乗入(2つの2乗)が、彼の結果は、次の通り
である。

定理 (de Rham, 1957).

$0 < \alpha < 1$ ならば、上述の関数方程式は、一意的付連続解 $V_\alpha(x)$ を持つ。しかも、 V_α は、狭義単調増加で、 $\alpha \neq \frac{1}{2}$ ならば、 $V'_\alpha(x) = 0$ a.e. ではなく、 V_α は、Lebesgue の意味の特異関数である。

上定理の関数 V_α は、 $\alpha < 1$ ならぬた、不公平な貨幣投げの分布関数と一致する。また、フラツアル分布 (de Wijjs) を説明するのに用ひらるい。

これらの差分方程式 (4), (4*) を通じて、我々は、次の商不関数と、Lebesgue の特異関数とのつながりを見出せた。

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} V_\alpha(x) \Big|_{\alpha=\frac{1}{2}} = \tilde{T}(x).$$

この関数 V_α は、(1) は、最初に特異関数として報告された。Salem (1943) (p. 3)。Salem は、彼の論文中で、次の様に、方程式を考察する。(本當は、geometrical な方法によることなく、本質的に同じものである)。

$$(4*) \quad \begin{cases} u\left(\frac{2^i+1}{2^n}\right) = (1-d_n) u\left(\frac{i}{2^{n-1}}\right) + d_n u\left(\frac{i+1}{2^{n-1}}\right), & 0 \leq i \leq 2^{n-1}-1, n \geq 1. \\ u(0)=0, \quad u(1)=1 \end{cases}$$

方程式 (**) に関する Salem の結果は次の通りである。

定理 (Salem).

$$0 < d_n < 1, \quad \text{かつ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^n \left\{ \frac{1}{2} + \left| d_n - \frac{1}{2} \right| \right\} < \infty \quad \Rightarrow \text{不連続}.$$

方程式 (**) を満たす. 唯一の解 $u(x)$ は左 1.2. 狹義单調増加である。かつこのとき。

$$u'(x) = 0 \quad \text{a.e.} \quad \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (1 - 2d_n)^2 = \infty.$$

§ おわり。

以上の群は 1.2. 商不関数は \approx 1.2. ものを関連 1.2. 色々と面白い事実が見えて出でます。商不関数は 1.2. 2.3. 7. フラクタル現象を説明する際の道具と 1.2. 考えられる 2. 3. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. 105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120. 121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128. 129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177. 178. 179. 180. 181. 182. 183. 184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 199. 200. 201. 202. 203. 204. 205. 206. 207. 208. 209. 210. 211. 212. 213. 214. 215. 216. 217. 218. 219. 220. 221. 222. 223. 224. 225. 226. 227. 228. 229. 230. 231. 232. 233. 234. 235. 236. 237. 238. 239. 240. 241. 242. 243. 244. 245. 246. 247. 248. 249. 250. 251. 252. 253. 254. 255. 256. 257. 258. 259. 260. 261. 262. 263. 264. 265. 266. 267. 268. 269. 270. 271. 272. 273. 274. 275. 276. 277. 278. 279. 280. 281. 282. 283. 284. 285. 286. 287. 288. 289. 290. 291. 292. 293. 294. 295. 296. 297. 298. 299. 300. 301. 302. 303. 304. 305. 306. 307. 308. 309. 310. 311. 312. 313. 314. 315. 316. 317. 318. 319. 320. 321. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 329. 330. 331. 332. 333. 334. 335. 336. 337. 338. 339. 340. 341. 342. 343. 344. 345. 346. 347. 348. 349. 350. 351. 352. 353. 354. 355. 356. 357. 358. 359. 360. 361. 362. 363. 364. 365. 366. 367. 368. 369. 370. 371. 372. 373. 374. 375. 376. 377. 378. 379. 380. 381. 382. 383. 384. 385. 386. 387. 388. 389. 390. 391. 392. 393. 394. 395. 396. 397. 398. 399. 400. 401. 402. 403. 404. 405. 406. 407. 408. 409. 410. 411. 412. 413. 414. 415. 416. 417. 418. 419. 420. 421. 422. 423. 424. 425. 426. 427. 428. 429. 430. 431. 432. 433. 434. 435. 436. 437. 438. 439. 440. 441. 442. 443. 444. 445. 446. 447. 448. 449. 450. 451. 452. 453. 454. 455. 456. 457. 458. 459. 460. 461. 462. 463. 464. 465. 466. 467. 468. 469. 470. 471. 472. 473. 474. 475. 476. 477. 478. 479. 480. 481. 482. 483. 484. 485. 486. 487. 488. 489. 490. 491. 492. 493. 494. 495. 496. 497. 498. 499. 500. 501. 502. 503. 504. 505. 506. 507. 508. 509. 510. 511. 512. 513. 514. 515. 516. 517. 518. 519. 520. 521. 522. 523. 524. 525. 526. 527. 528. 529. 530. 531. 532. 533. 534. 535. 536. 537. 538. 539. 540. 541. 542. 543. 544. 545. 546. 547. 548. 549. 550. 551. 552. 553. 554. 555. 556. 557. 558. 559. 5510. 5511. 5512. 5513. 5514. 5515. 5516. 5517. 5518. 5519. 5520. 5521. 5522. 5523. 5524. 5525. 5526. 5527. 5528. 5529. 5530. 5531. 5532. 5533. 5534. 5535. 5536. 5537. 5538. 5539. 5540. 5541. 5542. 5543. 5544. 5545. 5546. 5547. 5548. 5549. 5550. 5551. 5552. 5553. 5554. 5555. 5556. 5557. 5558. 5559. 55510. 55511. 55512. 55513. 55514. 55515. 55516. 55517. 55518. 55519. 55520. 55521. 55522. 55523. 55524. 55525. 55526. 55527. 55528. 55529. 55530. 55531. 55532. 55533. 55534. 55535. 55536. 55537. 55538. 55539. 55540. 55541. 55542. 55543. 55544. 55545. 55546. 55547. 55548. 55549. 55550. 55551. 55552. 55553. 55554. 55555. 55556. 55557. 55558. 55559. 55560. 55561. 55562. 55563. 55564. 55565. 55566. 55567. 55568. 55569. 55570. 55571. 55572. 55573. 55574. 55575. 55576. 55577. 55578. 55579. 55580. 55581. 55582. 55583. 55584. 55585. 55586. 55587. 55588. 55589. 55590. 55591. 55592. 55593. 55594. 55595. 55596. 55597. 55598. 55599. 555100. 555101. 555102. 555103. 555104. 555105. 555106. 555107. 555108. 555109. 555110. 555111. 555112. 555113. 555114. 555115. 555116. 555117. 555118. 555119. 555120. 555121. 555122. 555123. 555124. 555125. 555126. 555127. 555128. 555129. 555130. 555131. 555132. 555133. 555134. 555135. 555136. 555137. 555138. 555139. 555140. 555141. 555142. 555143. 555144. 555145. 555146. 555147. 555148. 555149. 555150. 555151. 555152. 555153. 555154. 555155. 555156. 555157. 555158. 555159. 555160. 555161. 555162. 555163. 555164. 555165. 555166. 555167. 555168. 555169. 555170. 555171. 555172. 555173. 555174. 555175. 555176. 555177. 555178. 555179. 555180. 555181. 555182. 555183. 555184. 555185. 555186. 555187. 555188. 555189. 555190. 555191. 555192. 555193. 555194. 555195. 555196. 555197. 555198. 555199. 555200. 555201. 555202. 555203. 555204. 555205. 555206. 555207. 555208. 555209. 555210. 555211. 555212. 555213. 555214. 555215. 555216. 555217. 555218. 555219. 555220. 555221. 555222. 555223. 555224. 555225. 555226. 555227. 555228. 555229. 555230. 555231. 555232. 555233. 555234. 555235. 555236. 555237. 555238. 555239. 555240. 555241. 555242. 555243. 555244. 555245. 555246. 555247. 555248. 555249. 555250. 555251. 555252. 555253. 555254. 555255. 555256. 555257. 555258. 555259. 555260. 555261. 555262. 555263. 555264. 555265. 555266. 555267. 555268. 555269. 555270. 555271. 555272. 555273. 555274. 555275. 555276. 555277. 555278. 555279. 555280. 555281. 555282. 555283. 555284. 555285. 555286. 555287. 555288. 555289. 555290. 555291. 555292. 555293. 555294. 555295. 555296. 555297. 555298. 555299. 555300. 555301. 555302. 555303. 555304. 555305. 555306. 555307. 555308. 555309. 555310. 555311. 555312. 555313. 555314. 555315. 555316. 555317. 555318. 555319. 555320. 555321. 555322. 555323. 555324. 555325. 555326. 555327. 555328. 555329. 555330. 555331. 555332. 555333. 555334. 555335. 555336. 555337. 555338. 555339. 555340. 555341. 555342. 555343. 555344. 555345. 555346. 555347. 555348. 555349. 555350. 555351. 555352. 555353. 555354. 555355. 555356. 555357. 555358. 555359. 555360. 555361. 555362. 555363. 555364. 555365. 555366. 555367. 555368. 555369. 555370. 555371. 555372. 555373. 555374. 555375. 555376. 555377. 555378. 555379. 555380. 555381. 555382. 555383. 555384. 555385. 555386. 555387. 555388. 555389. 555390. 555391. 555392. 555393. 555394. 555395. 555396. 555397. 555398. 555399. 555400. 555401. 555402. 555403. 555404. 555405. 555406. 555407. 555408. 555409. 555410. 555411. 555412. 555413. 555414. 555415. 555416. 555417. 555418. 555419. 555420. 555421. 555422. 555423. 555424. 555425. 555426. 555427. 555428. 555429. 555430. 555431. 555432. 555433. 555434. 555435. 555436. 555437. 555438. 555439. 555440. 555441. 555442. 555443. 555444. 555445. 555446. 555447. 555448. 555449. 555450. 555451. 555452. 555453. 555454. 555455. 555456. 555457. 555458. 555459. 555460. 555461. 555462. 555463. 555464. 555465. 555466. 555467. 555468. 555469. 555470. 555471. 555472. 555473. 555474. 555475. 555476. 555477. 555478. 555479. 555480. 555481. 555482. 555483. 555484. 555485. 555486. 555487. 555488. 555489. 555490. 555491. 555492. 555493. 555494. 555495. 555496. 555497. 555498. 555499. 555500. 555501. 555502. 555503. 555504. 555505. 555506. 555507. 555508. 555509. 555510. 555511. 555512. 555513. 555514. 555515. 555516. 555517. 555518. 555519. 555520. 555521. 555522. 555523. 555524. 555525. 555526. 555527. 555528. 555529. 555530. 555531. 555532. 555533. 555534. 555535. 555536. 555537. 555538. 555539. 555540. 555541. 555542. 555543. 555544. 555545. 555546. 555547. 555548. 555549. 555550. 555551. 555552. 555553. 555554. 555555. 555556. 555557. 555558. 555559. 555560. 555561. 555562. 555563. 555564. 555565. 555566. 555567. 555568. 555569. 555570. 555571. 555572. 555573. 555574. 555575. 555576. 555577. 555578. 555579. 555580. 555581. 555582. 555583. 555584. 555585. 555586. 555587. 555588. 555589. 555590. 555591. 555592. 555593. 555594. 555595. 555596. 555597. 555598. 555599. 5555100. 5555101. 5555102. 5555103. 5555104. 5555105. 5555106. 5555107. 5555108. 5555109. 5555110. 5555111. 5555112. 5555113. 5555114. 5555115. 5555116. 5555117. 5555118. 5555119. 5555120. 5555121. 5555122. 5555123. 5555124. 5555125. 5555126. 5555127. 5555128. 5555129. 5555130. 5555131. 5555132. 5555133. 5555134. 5555135. 5555136. 5555137. 5555138. 5555139. 5555140. 5555141. 5555142. 5555143. 5555144. 5555145. 5555146. 5555147. 5555148. 5555149. 5555150. 5555151. 5555152. 5555153. 5555154. 5555155. 5555156. 5555157. 5555158. 5555159. 5555160. 5555161. 5555162. 5555163. 5555164. 5555165. 5555166. 5555167. 5555168. 5555169. 5555170. 5555171. 5555172. 5555173. 5555174. 5555175. 5555176. 5555177. 5555178. 5555179. 5555180. 5555181. 5555182. 5555183. 5555184. 5555185. 5555186. 5555187. 5555188. 5555189. 5555190. 5555191. 5555192. 5555193. 5555194. 5555195. 5555196. 5555197. 5555198. 5555199. 5555200. 5555201. 5555202. 5555203. 5555204. 5555205. 5555206. 5555207. 5555208. 5555209. 5555210. 5555211. 5555212. 5555213. 5555214. 5555215. 5555216. 5555217. 5555218. 5555219. 5555220. 5555221. 5555222. 5555223. 5555224. 5555225. 5555226. 5555227. 5555228. 5555229. 5555230. 5555231. 5555232. 5555233. 5555234. 5555235. 5555236. 5555237. 5555238. 5555239. 5555240. 5555241. 5555242. 5555243. 5555244. 5555245. 5555246. 5555247. 5555248. 5555249. 5555250. 5555251. 5555252. 5555253. 5555254. 5555255. 5555256. 5555257. 5555258. 5555259. 5555260. 5555261. 5555262. 5555263. 5555264. 5555265. 5555266. 5555267. 5555268. 5555269. 5555270. 5555271. 5555272. 5555273. 5555274. 5555275. 5555276. 5555277. 5555278. 5555279. 5555280. 5555281. 5555282. 5555283. 5555284. 5555285. 5555286. 5555287. 5555288. 5555289. 5555290. 5555291. 5555292. 5555293. 5555294. 5555295. 5555296. 5555297. 5555298. 5555299. 5555300. 5555301. 5555302. 5555303. 5555304. 5555305. 5555306. 5555307. 5555308. 5555309. 5555310. 5555311. 5555312. 5555313. 5555314. 5555315. 5555316. 5555317. 5555318. 5555319. 5555320. 5555321. 5555322. 5555323. 5555324. 5555325. 5555326. 5555327. 5555328. 5555329. 5555330. 5555331. 5555332. 5555333. 5555334. 5555335. 5555336. 5555337. 5555338. 5555339. 5555340. 5555341. 5555342. 5555343. 5555344. 5555345. 5555346. 5555347. 5555348. 5555349. 5555350. 5555351. 5555352. 5555353. 5555354. 5555355. 5555356. 5555357. 5555358. 5555359. 5555360. 5555361. 5555362. 5555363. 5555364. 5555365. 5555366. 5555367. 5555368. 5555369. 5555370. 5555371. 5555372. 5555373. 5555374. 5555375. 5555376. 5555377. 5555378. 5555379. 5555380. 5555381. 5555382. 5555383. 5555384. 5555385. 5555386. 5555387. 5555388. 5555389. 5555390. 5555391. 5555392. 5555393. 5555394. 5555395. 5555396. 5555397. 5555398. 5555399. 5555400. 5555401. 5555402. 5555403. 5555404. 5555405. 5555406. 5555407. 5555408. 5555409. 5555410. 5555411. 5555412. 5555413. 5555414. 5555415. 5555416. 5555417. 5555418. 5555419. 5555420. 5555421. 5555422. 5555423. 5555424. 5555425. 5555426. 5555427. 5555428. 5555429. 5555430. 5555431. 5555432.