

非線形境界値問題の新しい数値解析法と  
そのプラズマの平衡解析への応用

広大理 師 華<sup>†</sup> (Hua Shi )  
広大核融合 渡辺二太 (Tsuguhiko Watanabe)  
広大核融合 濱松清隆 (Kiyotaka Hamamatsu)

§1 序

プラズマの平衡解析, 輸送現象解析, 波動伝播現象解析等には, 線形あるいは非線形境界値問題の数値解析が不可欠となる。この非線形境界値問題のより有効な数値解析法を確立することが本研究の目的である。

非線形境界値問題は, 多くの場合, Newtonの繰り返し法を用いて線形境界値問題に還元できる<sup>1,2)</sup>ので, 以下では線形境界値問題について考察する。

空間微分の差分化近似等を導入すると, 線形境界値問題は本質的には線形連立一次方程式を解くことである。この連立方程式を, LU分解法等を使って直接的に解く方法をここで

<sup>†</sup>北京建築工程学院物理教研室

は直接法と呼ぶことにする。方程式の未知数の数 $n$ が小さいときには、特に問題なく解を得ることが出来る。しかしながら、二次元あるいは三次元非線形境界値問題を解く時には、 $n$ が極めて大きくなる。もし、二次元の正方領域を $100 \times 100$ の格子に分割して境界値問題を解くならば $n=10000$ となり、三次元の正方領域を $50 \times 50 \times 50$ の格子に分割して解くときには $n=125000$ となる。このような状況においては、直接法で境界値問題を解くことは、現在の計算機では不可能となる。

連立方程式の未知数の数 $n$ を低下させる有力な方法の一つはShooting法を用いることである。Vlasovプラズマの軸対称平衡の数値解析には、Shooting法とNewton法の組み合わせによる方法が用いられ、その有効性が確かめられている<sup>1)</sup>。Shooting法の導入により、未知物理量の展開する空間を境界上だけに限定できるので $n$ を減らせる。Shooting法とNewton法の組み合わせ法は非線形境界値問題を解く一つの有力な方法と期待されるが、難かしい問題点もその内にかかえている。Poisson方程式等を解く時に、顕著に表われる数値的不安定性の克服である。Poisson方程式のような階円型の方程式は本質的には、“空間平均”の操作を表式化しているので、解の振舞は境界から中央部へと向かって平滑化される。このことは、空間的に短波長の成分は中央部で急速に減少することを意味し、

Shooting法でその振幅を定める際には常に数値的不安定性の問題を抱えることになる。

Shooting法では困難な階段型偏微分方程式は、緩和法による数値解析の適用が可能である。緩和法は、数値解析のためのプログラム作成も比較的簡単で、また、CPUメモリーも少なく済むという長所も有している。一般に、緩和法は空間的に短波長の誤差成分(残差)は速く消滅するが、長波長の残差の消滅には極めて多くの繰り返し計算が必要となる。この緩和法の収束を速めるために過緩和法が広く用いられているが、収束の本質的なスピードアップには到らない。また、緩和法の収束を速めるために、ICCG法<sup>3)</sup>が近年注目を高めているが、ここではそれについての言及はしない。

§2においては非線形境界値問題のNewton法による線形境界値問題への還元法について述べ、§3では線形境界値問題から得た線形連立一次方程式を緩和法と直接法との組み合わせで解く方法について述べる。また、この節ではFourier変換による方程式の書き換えと、その結果得られた解の収束の超高速化についても述べる。§4は新しい数値解析法を用いて解いたプラズマの平衡の一例について報告する。まとめは§5に於てられる。

## §2 非線形境界値問題のNewton法による線形化

以下では非線形境界値問題を

$$L(\varphi) = 0 \quad (1)$$

という形式で表わすことにする。解の近似値 $\varphi_0$ を既知とし、解 $\varphi$ を $\varphi_0$ とその修正量 $\varphi_1$ との和で

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \quad (2)$$

と表わす。ここで $\varphi_0$ が十分に精度の良い近似解ならば、 $\varphi_1$ は十分に小さく、展開

$$\begin{aligned} 0 &= L(\varphi) \\ &= L(\varphi_0 + \varphi_1) \\ &= L(\varphi_0) + \frac{\partial L(\varphi_0)}{\partial \varphi_0} \varphi_1 + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

は最初の二項で打ち切るこゝが許される。この(3)式に(2)式の関係を入れ代ると、 $\varphi$ に関する線形の偏微分方程式

$$L(\varphi_0) + \frac{\partial L(\varphi_0)}{\partial \varphi_0} (\varphi - \varphi_0) = 0 \quad (4)$$

を得る。この(4)式より、 $\varphi$ を求め、求めた $\varphi$ をあらためて $\varphi_0$ と置くことにより、再び新しい(4)式の関係に到達する。この過程を繰り返す。

$$\|L(\varphi)\| \ll 1 \quad (5)$$

となれば、解が求まったことになる。通常は2~5回の繰り返

して十分に精度の良い解に到達する。

### §3 直接法と緩和法との組み合わせによる線形連立方程式の数値解析法

前節で導入したNewton法を用いれば、非線形境界値問題は常に線形境界値問題に帰着される。この線形境界値問題に空間微分の差分化近似を用いると、

$$A \cdot x = B \quad (6)$$

という線形連立一次方程式に還元される。ここで、 $A$ は $n \times n$ 、 $B$ は $n \times 1$ の既知行列で、 $x$ は $n \times 1$ の未知ベクトルである。

連立方程式(6)のうち一部分(例えば長波長成分)を直接法で解き、残りを緩和法で解くことを考える。そのために、射影演算子 $P$ を導入し、(6)式を

$$P \cdot A \cdot x = P \cdot B \quad (7)$$

$$(1-P) \cdot A \cdot x = (1-P) \cdot B \quad (8)$$

に分ける。また未知ベクトル $x$ もこの $P$ を用いて

$$x = P \cdot x + (1-P) \cdot x \quad (9)$$

と二つに分け、(7)(8)式に代入すると

$$P \cdot A \cdot P \cdot x = P \cdot B - P \cdot A \cdot (1-P) \cdot x \quad (10)$$

$$(1-P) \cdot A \cdot (1-P) \cdot x = (1-P) \cdot B - (1-P) \cdot A \cdot P \cdot x \quad (11)$$

という二つの方程式に分割される。射影演算子 $P$ は

$$P^2 = P \quad (12)$$

$$(1-P)^2 = 1-P \quad (13)$$

の関係を満足する、(12)(13)式を(10)式に代入すると、

$$(P \cdot A \cdot P) \cdot P \cdot X = P \cdot B - [P \cdot A \cdot (1-P)] \cdot (1-P) \cdot X \quad (14)$$

となるので、(14)式を直接法で解くことにより、

$$P \cdot X = (P \cdot A \cdot P)^{-1} \cdot P \cdot B - (P \cdot A \cdot P)^{-1} \cdot [P \cdot A \cdot (1-P)] \cdot (1-P) \cdot X \quad (15)$$

を得る。この  $P \cdot X$  を(11)式に代入すれば  $(1-P) \cdot X$  を決定する連立方程式

$$\begin{aligned} [A - A \cdot P \cdot (P \cdot A \cdot P)^{-1} \cdot P \cdot A] \cdot (1-P) \cdot X \\ = (1-P) \cdot [1 - A \cdot P \cdot (P \cdot A \cdot P)^{-1} \cdot P] \cdot B \end{aligned} \quad (16)$$

を得る。この(16)式を緩和法で解き、 $(1-P) \cdot X$  を求め、これをあらためて(15)式に代入し、残りの  $P \cdot X$  を確定する。

直接法と緩和法の組み合わせによる数値解析の有効性の試験を行なった。解いた方程式は

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} - k^2 \varphi = x^2 \quad (k=0.1, 0.5) \quad (17)$$

で、境界条件は

$$\varphi(-1) = \varphi(1) = 1 \quad (18)$$

と置いた。  $x$  の区間  $[-1, 1]$  を20等分し、緩和法だけで解いたときの残差の減少と、直接法と緩和法を組み合わせで解いた時の残差の減少を図1に示す。射影演算子としては

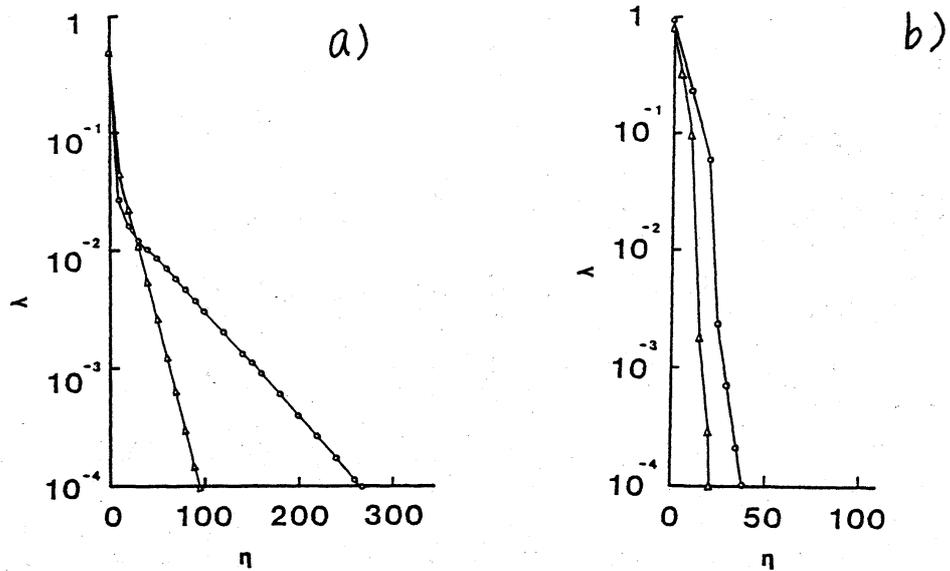


図1. 微分方程式(18)を解いた時の収束の速さ  
 縦軸:  $\lambda$  は残差を、横軸:  $n$  は緩和の回数を示す。  
 「○」印は緩和法だけで計算した場合、「△」印は直接法  
 と緩和法の組み合わせで計算した場合を示す。  
 a)  $k=0.1$  緩和法において加速を行なわない。  
 b)  $k=0.5$  緩和法において最適加速係数を採用。

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を採用した。いずれの場合も新しい数値解析法の方が速い収束を示している。

しかしながら、これらの数値解析結果は直接法の導入によって、緩和法で解くべき方程式の数が減少し、収束が速めら

れているように思われる。直接法で長波長成分を集中的に解き、緩和法を加速するという効果は見えていない。

緩和法をより効果的に加速するためには、長波長成分を取り除く事が有効と思われるので、基礎方程式をFourier展開して解くことを試みた。以下では議論を具体的に行うために、図2に示すような長方形領域で境界値問題を解くことにする。

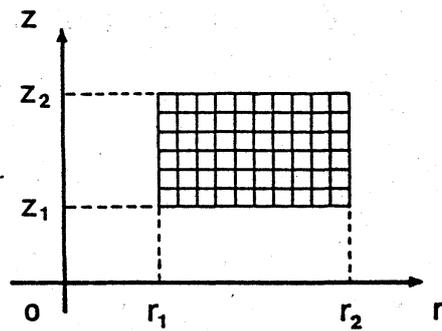


図2

Fourier変換の導入にあたっては、関数の不連続性にともなうGibbsの現象の回避が計算精度向上のために必要となる。図2のような領域において、関数 $\varphi(r, z)$ のFourier展開を考える。境界条件 $\varphi(r, z)$ ,  $\varphi(r, z_i)$  ( $i=1, 2$ )の値は、一般には独立の値を取るものである。このような条件下で $\varphi(r, z)$ をFourier展開によって表示するには、 $\varphi(r, z)$ より新しい関数 $\tilde{\varphi}(r, z)$ を作り出し、それをFourier展開することでGibbsの現象を回避することができる。ここで、 $\tilde{\varphi}(r, z)$ は

$$\tilde{\varphi}(r, z) = \tilde{\varphi}(r, z_i) = 0 \quad (i=1, 2) \quad (19)$$

を満たす関数で、具体的には、

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(r, z) = & \varphi(r, z) - \sum_{j=1, 2} \alpha_j(r) \varphi(r_j, z) - \sum_{i=1, 2} \beta_i(z) \varphi(r, z_i) \\ & + \sum_{j, i=1, 2} \alpha_i(r) \beta_j(z) \varphi(r_j, z_i) \end{aligned} \quad (20)$$

で与えられる。ただし、 $\alpha_i(r)$ と $\beta_i(z)$ は

$$\alpha_i(r_l) = \delta_{il} \quad , \quad \beta_i(z_l) = \delta_{il} \quad (i, l = 1, 2) \quad (21)$$

を満たす関数で

$$\alpha_1(r) = (r_2 - r) / (r_2 - r_1) \quad , \quad \alpha_2(r) = (r - r_1) / (r_2 - r_1) \quad (22)$$

$$\beta_1(z) = (z_2 - z) / (z_2 - z_1) \quad , \quad \beta_2(z) = (z - z_1) / (z_2 - z_1)$$

と与えた。

関数 $\tilde{\varphi}(r, z)$ が(19)式の条件を満たす時にはsin関数での展開

$$\tilde{\varphi}(r, z) = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{M-1} a_{nm} \sin \left[ \pi \frac{(r-r_1)}{(r_2-r_1)} n \right] \sin \left[ \pi \frac{(z-z_1)}{(z_2-z_1)} m \right] \quad (23)$$

が可能となる。この展開式(23)は $\partial^2 \tilde{\varphi} / \partial r^2 |_{r=r_1, r_2} = 0$ と $\partial^2 \tilde{\varphi} / \partial z^2 |_{z=z_1, z_2} = 0$ を強制するので、計算誤差の原因となる。

$\varphi(r, z)$ の満たすべき方程式を用いて $\partial^2 \varphi^* / \partial r^2 = \partial^4 \varphi^* / \partial r^4 = \dots = 0$ , 等の関係を満たす新しい関数 $\varphi$ の導入で、計算精度を向上する試みがされている<sup>4)</sup>。ここでは、(19)式だけの条件にとどめる。

展開式(23)を(20)式に代入すると、 $\varphi(r, z)$ のFourier展開表示式

$$\begin{aligned} \varphi(r, z) = & \sum_{j=1,2} \alpha_j(r) \varphi(r, z) + \sum_{i=1,2} \beta_i(z) \varphi(r, z_i) \\ & - \sum_{i,j=1,2} \alpha_j(r) \beta_i(z) \varphi(r, z_i) \\ & + \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{M-1} a_{nm} \sin \left[ \pi \frac{(r-r_1)}{(r_2-r_1)} n \right] \sin \left[ \pi \frac{(z-z_1)}{(z_2-z_1)} m \right] \end{aligned} \quad (24)$$

を得る。 $\varphi(r, z)$ を決定する線形偏微分方程式は差分近似の導入により

$$\sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{M-1} A_{lknm} \varphi(r_n, z_m) = B_{lk} \quad (l=1, 2, \dots, N-1, m=1, 2, \dots, M-1) \quad (25)$$

と書き表わされておるとする。ここで  $r_n, z_m$  は

$$r_n = r_1 + (r_2 - r_1)n/N, \quad z_m = z_1 + (z_2 - z_1)m/M \quad (26)$$

で与えられる。この(25)式に(24)式を代入すると  $\varphi(r_n, z_m)$  のかわりに、 $A_{nm}$  を決定する方程式

$$\sum_{\substack{n,m \\ n',m'}} A_{lknm} A_{n'm'} \sin\left(\frac{\pi n n'}{N}\right) \sin\left(\frac{\pi m m'}{M}\right) = \tilde{B}_{lk} \quad (27)$$

を得る。ここで  $\tilde{B}_{lk}$  は既知の量によつて

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{lk} = B_{lk} - \sum_{n,m} A_{lknm} \left[ \sum_j \alpha_j(r_n) \varphi(r_j, z_m) + \sum_i \beta_i(z_m) \varphi(r_n, z_i) \right. \\ \left. - \sum_{i,j} \alpha_j(r_n) \beta_i(z_m) \varphi(r_j, z_i) \right] \end{aligned} \quad (28)$$

と表わされる。さらに、(27)式の関係に Fourier 変換すると、

$$\sum_{n,m} \hat{A}_{lknm} A_{nm} = \hat{B}_{lk} \quad (29)$$

を得る。ここで、

$$\begin{aligned} \hat{A}_{lknm} = \sum_{l',k',n',m'} A_{l'k'n'm'} \sin\left(\frac{\pi n n'}{N}\right) \sin\left(\frac{\pi m m'}{M}\right) \\ \times \sin\left(\frac{\pi l l'}{N}\right) \sin\left(\frac{\pi k k'}{M}\right) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\hat{B}_{lk} = \sum_{l',k'} \tilde{B}_{l'k'} \sin\left(\frac{\pi l l'}{N}\right) \sin\left(\frac{\pi k k'}{M}\right) \quad (31)$$

となる。

(27)式より緩和法で  $A_{n'm'}$  を求めることは一般に不可能であった(収束しない)が、(29)式を解く緩和法の収束速度は極

めて速いものであった。また、(29)式を直接法と緩和法で計算する部分に分ける射影演算子としては、 $a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}, \dots$ 等、長波長成分を直接法で解くように選ぶことが適切であると思われる。Grad-Shafranov方程式(後節参照)を解いた時の収束の速さを図3に示した。

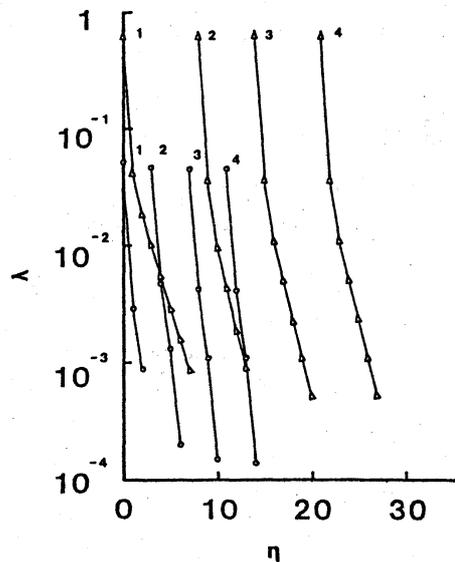


図3 Grad-Shafranov方程式を解いた時の収束の速さ  
縦軸:  $\epsilon$  は残差を、横軸:  $n$  は緩和の回数を示す。  
「 $\Delta$ 」印は Fourier 変換後、緩和法だけで解いた場合。  
「 $\circ$ 」印は長波長成分を直接法で解き、残りを緩和法で計算した場合。どちらの場合も、過緩和法は用いないが、 $\tau$  (加速係数=0)。また書き込まれている小さい数字は Newton 法の回数である。

#### §4 トカマクプラズマの平衡解析への応用

ここでは、§2, §3 で展開した新しい数値解析法を用いてトカマクプラズマの平衡を数値解析した。トカマクプラズマの平衡は磁気面関数  $\psi$  に対する Grad-Shafranov 方程式

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\frac{4\pi}{c} r j_0 \quad (32)$$

$$j_0 = r \frac{dP(\psi)}{d\psi} + \frac{1}{cr} \frac{dI^2(\psi)}{d\psi} \quad (33)$$

を解くことで決定される。プラズマの圧力分布  $P(\psi)$  とポロイダル電流分布  $I(\psi)$  としては、

$$P(\psi) = P_0 \exp\left[-\psi^2/2(k\psi_0)^2\right] \quad (34)$$

$$I^2(\psi) = I_0^2 \left[1 - \delta \exp\left\{-\psi^2/2(\mu\psi_0)^2\right\}\right] \quad (35)$$

の形を仮定した。ここで、 $\psi_0$  は境界での磁気面関数  $\psi$  の値で、定数  $k, \mu$  は、それぞれ圧力分布とポロイダル電流分布の空間的变化の急峻さを表わす。 $\psi_0$  の決定には、プラズマ小半径を  $a$ 、大半径を  $R$ 、トロイダル磁場を  $B_t$ 、ポロイダル磁場を  $B_p$  として、関係式

$$\psi_0 \sim aR \frac{1}{g} \frac{a}{R} B_t = \frac{a^2}{g} B_t = \frac{z}{cR} \frac{a^2}{g} I(\psi_0) \quad (36)$$

を用いた。ここで  $g (= aB_t/RB_p)$  は完全係数である。また (35) 式の右辺の  $\delta$  は、プラズマ内を流れる電流の割合を指定する。

Grad-Shafranov 方程式 (32) を解く際には、

$$b \leq r \leq c, \quad -a \leq z \leq a \quad (37)$$

の長方形領域を想定した。この長方形領域に正方格子  $(r_i, z_j)$  ( $i=0, 1, \dots, N, j=0, 1, \dots, M$ ) を設定し、(32)式に差分近似を採用すると

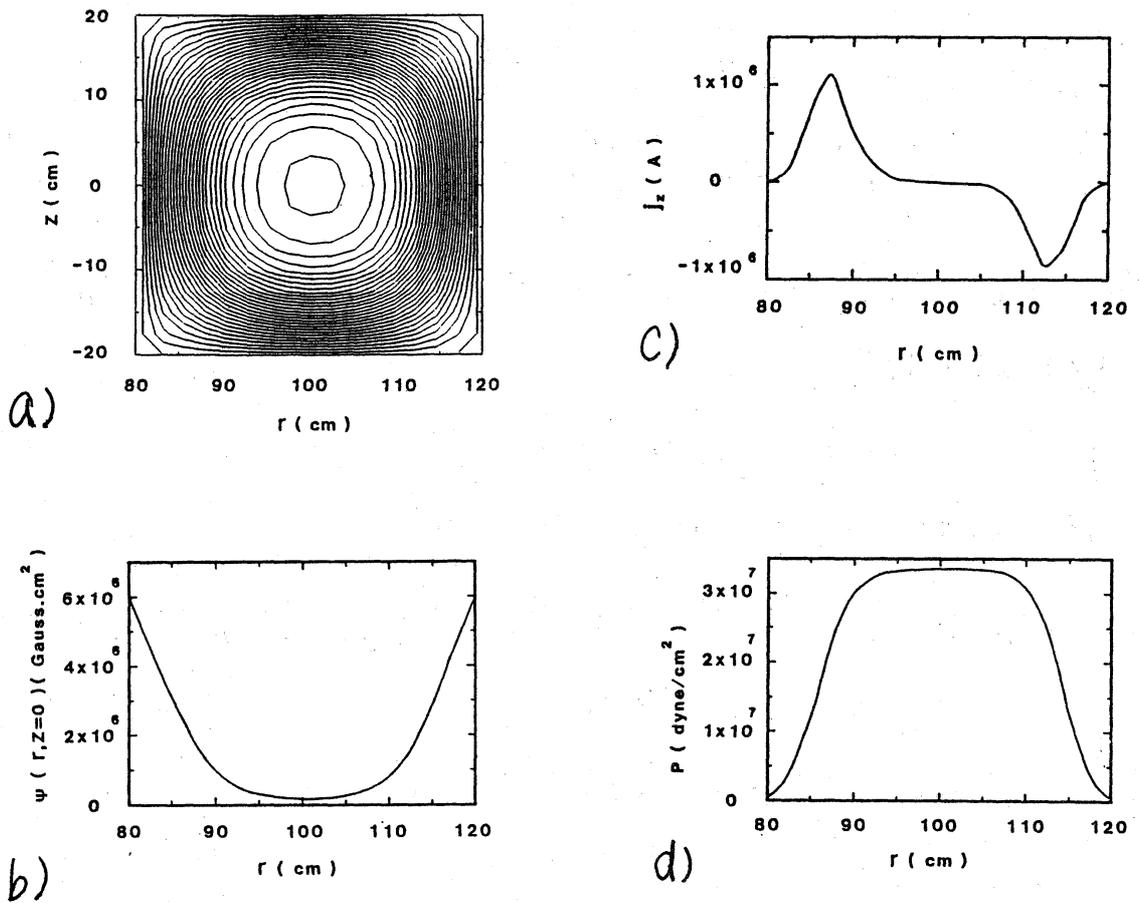


図4 Grad-Shafranov 方程式の数値解析結果

a) 磁気面 ( $\psi = \text{一定}$ )

b)  $z=0$  平面での  $\psi$  の  $r$  方向への変化

c)  $z=0$  平面でのプラズマ電流の  $r$  方向への変化

d)  $z=0$  平面でのプラズマ圧力の  $r$  方向への変化

$$\frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} - 2\psi_{ij}}{h^2} - \frac{1}{r_i} \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{h} + \frac{\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} - 2\psi_{ij}}{h^2} = -\frac{4\pi}{c} r_i j_\theta(r_i, z_j) \quad (38)$$

となる。ただし、 $h$ は格子間隔である。上記の $(N-1) \times (M-1)$ 元の連立方程式を§2, §3で述べた新しい数値解析法により解いた。その数値計算例を図4に示す。図4の計算に際しての収束の速さについては§3の図3ですでに示した。

## §5 まとめ

非線形境界値問題をNewtonの繰り返し法で解く新しい数値計算法を考察し、それをプラズマの平衡解析に応用した。ここで開発した新しい工夫は、Newtonの繰り返し計算の際に必要となる、線形連立方程式を解くためのものである。二次元あるいは三次元境界値問題を解く際に、大規模連立方程式を緩和法で効率良く解くために、空間的に長波長の成分に関しては直接法で解き、短波長成分のみを緩和法で解くのが新しい工夫である。この工夫の有効性をいくつかの例題で確かめた。実際に確かめる方程式は、

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + a\varphi = f(\varphi, x)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = f(\varphi, r, z)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = f(\varphi, r, z)$$

に分類される。これらの方程式の計算に対しては全て収束した。今後はより広範な形の方程式に対して、その有効性を確かめることが残されている。

### 参考文献

- 1) K. Hamamatsu, T. Watanabe, J. W. Van Dam and Kyoji Nishikawa:  
J. Phys. Soc. Jpn. 52 (1983) 124.
- 2) Y. Kishimoto, K. Mima, T. Watanabe, H. Hojo and Kyoji Nishikawa:  
J. Phys. Soc. Jpn. 51 (1982) 2304.
- 3) J. A. Meijerink, H. A. van der Vorst : Math. Comput. 31 (1977) 148.
- 4) 渡辺二太、中尾隆司、大沼俊郎、西川恭治:  
不均質磁化プラズマ中の波動伝播の数値解析、波動による高温プラズマの加熱と制御 (昭和55-57年度文部省科学研究費補助金研究成果報告書)。