数理解析研究所講究録
第 542 巻 1985 年 67-71

A Remark on Critical Points of Link Cobordism

神大　中西康剛（Yasutaka Nakanishi）

$R^3\times[0,1]$ に proper に埋められたコムパクトな有向P. L. 曲面 F を考える。F は elementary critical points のみ有する曲面に ambient isotopic である。（[3], I.）そこで，elementary critical points のみを F は有すると仮定し，その個数を c(F) で表わす。

この c(F) を 絡み輪 $(L_i, R^3)=(F\cap R^3\times\{i\}, R^3\times\{i\})$ $(i=0,1)$ の代数的不変量で評価することが 本稿の目的である。

有向絡み輪 (L, R^3) に対し，L のどの meridian も t にうつす 絡み輪群 $\pi_1(R^3-L)$ から t で生成される無限巡回群 $<t>$ への準同型に対応する R^3-L の無限巡回被覆空間 $\hat{E}$ をとる。すると 1次元ホモロジー群 $H_1(\hat{E};\mathbb{Z})$ は，有限生成 $\mathbb{Z}<t>$-加群 であり，$\mathbb{Z}<t>$-加群としての正方表現行列を有する。そこで このような正方表現行列の次数の最小数を $m(L)$ で表わす。（[2].）但し，$H_1(\hat{E};\mathbb{Z})$ が自明の時は、

$m(L)=0$ とする。

定理. $c(F) \geqq |m(L_0) - m(L_1)|$.

証明. F が minimal points や maximal points を有するとき，図1のように piping により，saddle points だけを有する曲面 F' で $c(F')=c(F)$ であるものが $R^3 \times [0,1]$ にとれる。故に saddle points のみ F が有するとしてよい。

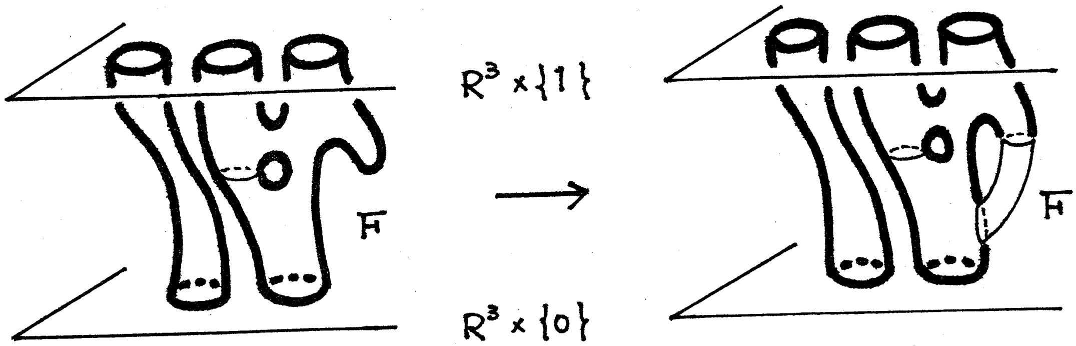

図1

更に saddle points の levels はすべて異なるとしてよい。つまり，$k=c(F)$ とおくと $(k+1)$ 個の数を $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_k=1$ ととることにより F の saddle points が $R^3 \times (t_i, t_{i+1})$ に各々1個ずつあるとしてよい。ここで，$(F \cap R^3 \times \{t_i\}, R^3 \times \{t_i\})$ を (L_{t_i}, R^3) で表わすことにすると 次の三角不等式から，F が唯1個の

saddle pointを有する場合に示せば十分であるとわかる。

$$|m(L_0)-m(L_1)| \leqq |m(L_{t_0})-m(L_{t_1})|+|m(L_{t_1})-m(L_{t_2})|+\cdots+|m(L_{t_{k-1}})-m(L_{t_k})|.$$

さて F が唯1個の saddle point のみを有し，つまり，L_1がL_0から唯1回 fusion すると得られるとする。このfusionを実現する band を β_0 とし，L_0の連結Seifert曲面をS_0とする。

$\beta_0 \cap S_0$を β_0に沿った pipingにより，柳川[6]の方法で消去することにより，L_1の連結Seifert曲面S_1が得られる。さて，$H_1(S_1-\beta_0)$ の自由アーベル群としての basis を表現する simple loops $\{a_i\}$ 及び β_0 を1度だけ通過する simple loop b_0 を，$\{a_i\}\cup b_0$ が $H_1(S_1)$ の自由アーベル群としての basis を表現するようにとる。すると，L_1のSeifert 行列は，

$$\left|\begin{array}{c:c} lk(a_i, a_j^+) & lk(a_i, b_0^+) \\ \hdashline lk(b_0, a_j^+) & lk(b_0, b_0^+) \end{array}\right|_{1\leqq i,j\leqq n}$$

で得られ，$H_1(\hat{E}(L_1);\mathbb{Z})$ は

$$\left|\begin{array}{c:c} lk(a_i, a_j^+)-t\,lk(a_j, a_i^+) & lk(a_i, b_0^+)-t\,lk(b_0, a_i^+) \\ \hdashline lk(b_0, a_j^+)-t\,lk(a_j, b_0^+) & lk(b_0, b_0^+)-t\,lk(b_0, b_0^+) \end{array}\right|_{1\leqq i,j\leqq n}$$

を$\mathbb{Z}\langle t\rangle$-正方表現行列にもつ。

ここで，小行列 $|lk(a_i, a_j^+)|_{1\leqq i,j\leqq n}$ は L_0の Seifert行列でもあるので，小行列 $|lk(a_i, a_j^+)-t\,lk(a_j, a_i^+)|_{1\leqq i,j\leqq n}$ は，$H_1(\hat{E}(L_0);\mathbb{Z})$ の$\mathbb{Z}\langle t\rangle$-正方表現行列であり、これは定義により、次数$m(L_0)$の正方行列に可約である。故に 先にあげた

$H_1(\hat{E}(L_1);\mathbb{Z})$ の $\mathbb{Z}\langle t\rangle$- 正方表現行列は，次数 $m(L_0)+1$ までは少なくとも可約である。故に $m(L_1) \leqq m(L_0)+1$ を得る。

逆も，L_0 が L_1 から唯1回 fission すると得られることから，同様に議論ができ，$m(L_0) \leqq m(L_1)+1$ が得られる。

以上から，$|m(L_0)-m(L_1)| \leqq 1$ が得られる。

これにより，証明が完了した。

付記. 上の定理の系として，[4],[5],[1] の結び目の bordism の critical points の個数の評価が得られる。つまり，$R^3\times[0,\infty)$ に proper に埋められたコムパクトな有向 P.L. 曲面 F 及び結び目 $(K,R^3)=(F\cap R^3\times\{0\}, R^3\times\{0\})$ について，$c(F) \geqq m(K)+1$ であり，ここで，K が絡み輪であっても良いことがわかる。

F のコムパクト性から十分大なる数 t をとれば，F は $R^3\times[0,t)$ にある。ここで，$R^3\times\{t\}$ に trivial knot をとり，F の maximal points のひとつと piping で結ぶことにより，新たに link cobordism F' が得られる。定理より，
$c(F') \geqq |m(L)-m(\text{a trivial knot})|$ であり，$m(\text{a trivial knot})=0$，$c(F)-1=c(F')$ であることから，$c(F) \geqq m(L)+1$ が得られる。

最後に，最近に河内[2]が得た link bordism のより精密

な評価を報告しておく。

$R^3 \times [0, \infty)$ に proper に埋められたコムパクトな有向P.L.曲面 F 及び 絡み輪 $(L, R^3) = (F \cap R^3 \times \{0\}, R^3 \times \{0\})$ について、$c(F) - 2c_0(F) \geqq m(L) + 1$ である。ここで、$c_0(F)$ は、F の minimal points の個数を表わす。

References

(1) Hosokawa, F., Kawauchi, A., Nakanishi, Y., Sakuma, M.: Note on critical points of surface in 4-space. Kobe J. Math., (to appear).

(2) Kawauchi, A.: On critical points of proper surfaces in the upper half-space. (to appear).

(3) Kawauchi, A., Shibuya, T., Suzuki, S.: Descriptions on surfaces in four-space, I. Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 10, 75-125 (1982); ibid., II. ibid. 11, 31-69 (1983).

(4) Nakanishi, Y., Nakagawa, Y.: On ribbon knots. Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 10, 423-430 (1982).

(5) Saito, M.: Minimal number of saddle points of proper embedded surfaces in the 4-ball. Kobe J. Math. (to Appear).

(6) Yanagawa, T.: On ribbon 2-knots; the 3-manifolds bounded by the 2-knots. Osaka J. Math. 6, 447-464 (1969). ibid. II; the second homotopy group of the complementary domain. Osaka J. Math. 6, 465-473 (1969).