数理解析研究所講究録
第 543 巻 1985 年 92-103

アルティン局所環上の加群の長さについて

都立大・理　石川武志 (Takeshi Ishikawa)

Rをアルティン局所環, $\mathfrak{m}$をその極大イデアルとする。RがGorenstein環であるためには、Rの任意のイデアル$\mathfrak{a}$に対して $\ell(\mathfrak{a}) + \ell(0:\mathfrak{a}) = \ell(R)$ が成り立つことが必要十分であることは, よく知られている(c.f. [1])。こゝで, アルティンR-加群Mに対して $(0:M)$はその Annihilator, $\ell(M)$ はMの長さを表わす。さて, 多くの場合, $\ell(\mathfrak{a}) + \ell(0:\mathfrak{a}) \geqq \ell(R)$ であるが, このことは一般に成立する訳ではない。では, どの様なときこれが成立するのだろうか?この問題をあつかうのには, $\ell(R/0:\mathfrak{a})/\ell(\mathfrak{a}) \leqq 1$ かどうかを考える方が都合がよいので, 次の様に定義する。

<u>定義</u>　アルティンR-加群Mに対して

$$t(M) = t_R(M) = \begin{cases} \ell(R/0:M)/\ell(M) & (M \neq 0) \\ 1 & (M = 0) \end{cases}$$

$T(M) = T_R(M) = \sup_N t(N)$, こゝでNはMの部分加群すべてを動く, とする。

以下，Rをアルティン局所環，$\mathfrak{m}$をその極大イデアルとする。又R-加群は有限生成R-加群を意味するものとし，R-加群MのSocleを$\mathrm{Soc}(M) = (0 :_M \mathfrak{m})$，$M$のtypeを$r(M) = l(0 :_M \mathfrak{m})$で表わし，$\mu(M)$は$M$の極小生成系の元の個数を表わすものとする。

§1. $t(M)$, $T(M)$の上限，下限.

まず，次のことが成り立つことは明らかであろう。

(1.1) Proposition

(1) $\mathfrak{m}M = 0 \Rightarrow t(M) = 1/r(M) \leqq 1$.

(2) Mが cyclic $\Rightarrow t(M) = 1$.

これから直ちに

(1.2) Corollary

$$\mathfrak{m}^2 = 0 \Rightarrow T(R) = 1.$$

$t(M)$, $T(M)$の上限，下限について，次が成り立つ。

(1.3) Theorem

R-加群$M \neq 0$に対して

(1) $1/r(M) \leqq t(M) \leqq r(M)$，従って

(2) $1 \leqq T(M) \leqq r(M)$

(証明)

(2)は(1)より明らかだから(1)を示せばよい。$E = E(R/\mathfrak{m})$を$R/\mathfrak{m}$の injective envelope とすると，[2]より，

$M \hookrightarrow E^{r(M)}$ で $R/0:M \hookrightarrow Hom_R(M, M) \hookrightarrow Hom_R(M, E)^{r(M)}$ 従って，$\ell(R/0:M) \leqq r(M) \cdot \ell(Hom_R(M,E))$ を得る。又 [2] より $\ell(M) = \ell(Hom_R(M,E))$ だから，$t(M) \leqq r(M)$ が得られる。一方，$M \cong Hom_R(R/0:M, M) \hookrightarrow Hom_R(R/0:M, E)^{r(M)}$ より同様にして $1/r(M) \leqq t(M)$ が得られる。 //

又，上の Theorem に於て，等号の成立に関して，次が成り立つ。

(1.4) <u>Theorem</u>

R-加群 $M \neq 0$ に対して，次の条件は同値である。

(1) $T(M) = r(M)$

(2) $r(M) = 1$

(3) すべての R-部分加群 N に対して，$t(N) = 1$.

(証明)

(1) を仮定すると，ある部分加群 N があって，$t(N) = r(M)$ であるから，(1.3) の証明と同様に，$R/0:N \hookrightarrow Hom_R(N, N) \hookrightarrow Hom_R(N, M) \hookrightarrow Hom_R(N, E)^{r(M)}$ であり，両端の加群の長さを比較して，$R/0:N \cong Hom_R(N, E)^{r(M)}$ を得るが，R は局所環だから，$r(M) = 1$ でなければならない。次に $r(M) = 1$ とすると，任意の部分加群 $N \neq 0$ に対して $r(N) = 1$ であり従って (1.3) より $t(N) = 1$，従って又 $T(M) = 1 = r(M)$ で (1) 及び (3) が成立する。又，(3) を仮定すれば，

$t(\mathrm{Soc}(M)) = 1/r(M)$ だから $r(M) = 1$ でなければならない。//

こゝで，$M=R$ とおけば，はじめに述べた classical result が得られる。即ち．

(1.5) Corollary

R が Gorenstein i.e. $r(R)=1$

$\Longleftrightarrow$

任意のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して $\ell(\mathfrak{a})+\ell(0:\mathfrak{a})=\ell(R)$

次に上の Theorem の不等式は，ある意味で best possible であることを示そう。

(1.6) Proposition

任意の整数 $r \geqq 2$ と任意の小さな実数 $e>0$ に対して，$r(R)=r$ で $r-e<T(R)<r$ となるアルティン局所環 R が存在する．

(証明)

Kを体，$X_i^{(k)}$, Y_i ($i=1,\cdots,n$, $k=1,\cdots,r$) を不定文字とし，$R = K[X_i^{(k)}, Y_i \mid 1\leqq i\leqq n, 1\leqq k\leqq r]/I = K[x_i^{(k)}, y_i \mid 1\leqq i\leqq n, 1\leqq k\leqq r]$，こゝで $I = (X_i^{(k)} \mid 1\leqq i\leqq n, 1\leqq k\leqq r)^2 + (Y_i \mid 1\leqq i\leqq n)^2 + (X_i^{(k)}Y_j \mid 1\leqq i\neq j\leqq n, 1\leqq k\leqq r) + (X_i^{(k)}Y_i - X_j^{(k)}Y_j \mid 1\leqq i,j\leqq n, 1\leqq k\leqq r)$ とする。Rは $\mathfrak{m} = (x_i^{(k)}, y_i \mid 1\leqq i\leqq n, 1\leqq k\leqq r)$ を極大イデアルとする局

所環で，$\mathfrak{m}^2 = (x_1^{(1)}y_1, \cdots, x_1^{(r)}y_1)$，$\mathfrak{m}^3 = 0$．従って $\ell(R) = rn + n + r + 1$。又 $(0 : \mathfrak{m}) = \mathfrak{m}^2$ だから $r(R) = r$ である。さて，$\mathfrak{a} = (y_1, \cdots, y_n)$ とすると，$0 : \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ で $\mathfrak{a}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ だから $\ell(\mathfrak{a}) = \ell(0 : \mathfrak{a}) = n + r$。故に $t(\mathfrak{a}) = \frac{rn+1}{r+n} = r - \left(\frac{r^2-1}{r+n}\right)$，従って n を十分大きくとれば求める Example が得られる。 //

§2. いつ $T(R) = 1$ となるか?

R が Gorenstein なら $T(R) = 1$ であるが，その逆は成立しない。

(2.1) Example

K を体，$X_1, \cdots, X_n$ を不定文字とし，$R = K[X_1, \cdots, X_n]/(X_1, \cdots, X_n)^m = K[x_1, \cdots, x_n]$ とする。任意の $f \in R$ に対して，ある k があって $(0 : f) = (x_1, \cdots, x_n)^{m-k}$ が成り立つから，R の任意のイデアル $\mathfrak{a} = (f_1, \cdots, f_s)$ に対して，$(0 : \mathfrak{a}) = \bigcap_{i=1}^{s} (0 : f_i) = (0 : f_t)$ となる t がある。従って，$t(\mathfrak{a}) = \ell(R/0 : f_t)/\ell(\mathfrak{a}) = \ell(Rf_t)/\ell(\mathfrak{a}) \leqq 1$．故に $T(R) = 1$。しかし，明らかに $n, m \geqq 2$ に対して R は Gorenstein ではない。 //

T. H. Gulliksen [3] は $r(R) \leqq 3$ ならば，任意の忠実な R-加群 M に対して，$\ell(M) \leqq \ell(R)$ であることを示してい

る。彼のこの結果は，次の様に述べることができる。

(2.2) <u>Theorem</u> (Gulliksen)

R-加群 $M \neq 0$ に対して

$\ell(R/0:M) \leqq 3 \Rightarrow t(M) \leqq 1$.

こゝで，この結果の別証明（本質的には彼の証明と同じだが）を与えよう。まず

(2.3) <u>Lemma</u>

$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ を R-加群の完全系列とし，$t(M') \leqq 1$, $t(M'') \leqq 1$ とする。もし $t_{R/0:M}\left(\frac{0:M'}{0:M}\right) \geqq 1$ 又は $t_{R/0:M}\left(\frac{0:M''}{0:M}\right) \geqq 1$ ならば $t(M) \leqq 1$.

(証明)

L が $R/\mathfrak{a}$-加群なら $t_R(L) = t_{R/\mathfrak{a}}(L)$ だから，M は忠実と仮定してよい。そうすると $(0:M')(0:M'') = 0$ であるから $0:M' \subseteqq 0:(0:M'')$, $(0:M'') \subseteqq 0:(0:M')$ であり従って $t(0:M')$ 又は $t(0:M'') \geqq 1$ の仮定から $\ell(0:M') + \ell(0:M'') \leqq \ell(R)$ である。従って $\ell(M) - \ell(R) = \ell(M') + \ell(M'') - \ell(R) \geqq (\ell(M') + \ell(0:M') - \ell(R)) + (\ell(M'') + \ell(0:M'') - \ell(R))$。故に，$t(M') \leqq 1$, $t(M'') \leqq 1$ より $t(M) \leqq 1$ が得られる。 //

この Lemma から直ちに

(2.4) <u>Corollary</u>

$\mu(M)=2$ とし $\{m_1, m_2\}$ を M の極小生成系とするとき，$i=1, 2$ のいずれかに対して $t_{R/0:M}\left(\frac{0:m_i}{0:M}\right) \geqq 1$ なら，$t(M) \leqq 1$ である。

(定理の証明)

まず，M は忠実と仮定してよい。そこでもし主張が正しくないとすると，$\ell(M)$ が最小の反例 M をとることができる。このとき，任意の部分加群 $M' \neq 0$ に対して，$(0:M') \neq 0$ $(0:M/M') \neq 0$。$\{m_1, \cdots, m_d\}$ を M の極小生成系とし，M_i を m_i 以外の m_j すべてで生成される部分加群とする。このとき，すべての i について $(0:(M_i+\mathfrak{m}M)) \neq 0$ で

$$\bigoplus_{i=1}^{d}(0:(M_i+\mathfrak{m}M)) \subsetneqq (0:\mathfrak{m}M)=(0:\mathfrak{m})$$

従って，$d \leqq 3$ がわかる。$d=1$ なら (1.1) より $t(M)=1$. $d=2$ のときは，$r(R) \leqq 3$ だから $\ell(0:(M_i+\mathfrak{m}M))$ $i=1, 2$ のいずれかは 1 であり，$r(0:M_1)$ 又は $r(0:M_2)=1$ となる。従って，(2.4) より $t(M) \leqq 1$. 故に $d=3$ でこのとき

$$\bigoplus_{i=1}^{3}(0:(M_i+\mathfrak{m}M)) = (0:\mathfrak{m}M) = (0:\mathfrak{m})$$

であり，$(0:\mathfrak{m})M = \sum_{i=1}^{3}(0:(M_i+\mathfrak{m}M))M = \sum_{i=1}^{3}(0:(M_i+\mathfrak{m}M))m_i$ $= \left(\sum_{i=1}^{3}(0:(M_i+\mathfrak{m}M))\right)m = (0:M)m$，ここで $m=m_1+m_2+m_3$. 極小生成系をとりかえて，$m=m_1$ としてよいから，

次の完全系列を得る。

$$0 \longrightarrow (0:(Rm_1+\mathfrak{m}M)) \longrightarrow (0:\mathfrak{m}M) \xrightarrow{m_1} (0:\mathfrak{m})M \to 0$$

こゝで $(0:(M_2+\mathfrak{m}M)) \oplus (0:(M_3+\mathfrak{m}M)) \subseteqq (0:(Rm_1+\mathfrak{m}M))$ だから $\ell(0:(Rm_1+\mathfrak{m}M)) \geqq 2$，従って $\ell((0:\mathfrak{m})M)=1$．そこで，もし $(0:\mathfrak{m})M = \mathrm{Soc}(M)$ が示されれば，(1.3) より $t(M)=1$ となり，矛盾が導かれ，証明が完了する。もし $\mathrm{Soc}(M)=(0:\mathfrak{m})M \oplus N$，$N \neq 0$ とすると，M のとり方から $(N:M)\neq 0$ だから ある $x \neq 0 \in R$ があって $0 \neq xM \subseteqq N \subseteqq \mathrm{Soc}(M)$。従って $x\mathfrak{m}M=0$ 故に $x\mathfrak{m}=0$。故に $0 \neq xM \subseteqq (0:\mathfrak{m})M \cap N = 0$．これは矛盾，従って $N=0$．これで定理の証明は終った。 //

この結果から次の二つの場合に $T(R)=1$ となることがわかる。

(2.5) <u>Proposition</u>

$\ell(R) \leqq 6 \Rightarrow T(R)=1$

(証明)

$\mathfrak{a} \in R$ のイデアルとする。$\ell(0:\mathfrak{m})=1$ ならよいから，$\ell(0:\mathfrak{m}) \geqq 2$ とする．従って $\ell(0:\mathfrak{a}) \geqq 2$．又，$\mathfrak{m}\mathfrak{a}=0$ なら (1.1) より $t(\mathfrak{a}) \leqq 1$ だから $\mathfrak{m}\mathfrak{a} \neq 0$ としてよい。そうすると $\ell(0:\mathfrak{m}\mathfrak{a}) \leqq 5$，従って，$\ell(R/0:\mathfrak{a}) = \ell(0:\mathfrak{m}\mathfrak{a}/0:\mathfrak{a}) \leqq 3$，故に (2.2) より $t(\mathfrak{a}) \leqq 1$ //

(2.6) Proposition

$\mu(\mathfrak{m}) \leqq 3,\ \mathfrak{m}^2 M = 0 \quad \Rightarrow \quad t(M) \leqq 1.$

従って

$\mu(\mathfrak{m}) \leqq 3,\quad \mathfrak{m}^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad T(R) = 1.$

(証明)

前半を示せばよい。(1.1)より $\mathfrak{m}M \neq 0$ としてよい。このとき $(0:\mathfrak{m}M) = \mathfrak{m}$, $(0:M) \geqq \mathfrak{m}^2$, 従って $L(R/0:M) = l\left(0:\mathfrak{m}M/0:M\right) \leqq l(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \mu(\mathfrak{m}) \leqq 3$. 故に (2.2) より $t(M) \leqq 1$. //

$\mu(\mathfrak{m}) = 4$ のとき，次が成り立つ。

(2.7) Proposition

$\mu(\mathfrak{m}) = 4,\ \mathfrak{m}^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad T(R) \leqq 5/4$

(証明)

$\mathfrak{a}$ を $t(\mathfrak{a}) = T(R) > 1$ となるイデアルとすると $\mathfrak{a}\mathfrak{m} \neq 0$, $\mathfrak{a}\mathfrak{m}^2 = 0$ だから，次の完全系列を得る。

$$0 \longrightarrow \frac{0:\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}^2} \longrightarrow \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} \longrightarrow \frac{0:\mathfrak{a}\mathfrak{m}}{0:\mathfrak{a}} \longrightarrow 0$$

もし $\mathfrak{m}^2 \subsetneqq 0:\mathfrak{a}$ なら $L(R/0:\mathfrak{a}) = l(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) - l\left(\frac{0:\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}^2}\right) \leqq 3$ であり (2.2) より $t(\mathfrak{a}) \leqq 1$ となるから $0:\mathfrak{a} = \mathfrak{m}^2$ で，$t(\mathfrak{a}) = l(R/\mathfrak{m}^2)/l(\mathfrak{a}) = 5/l(\mathfrak{a})$。一方，もし $\mathfrak{a}\mathfrak{m} \subsetneqq \mathfrak{a} \cap (0:\mathfrak{m})$ なら $a \in \mathfrak{a} \cap (0:\mathfrak{m})$ で $a \notin \mathfrak{a}\mathfrak{m}$ なる a がある。a を $\mathfrak{a}$ の極小生成系の一つとして $\mathfrak{a} = Ra + \mathfrak{a}'$ とすると

$(0:\mathfrak{a}) = (0:\mathfrak{a}')$ であり $t(\mathfrak{a}) < t(\mathfrak{a}')$ となるから, $\mathfrak{a}\mathfrak{m} = \mathfrak{a} \cap (0:\mathfrak{m}) = \mathrm{Soc}(\mathfrak{a})$。従って (1.3) より $\ell(\mathfrak{a}\mathfrak{m}) \geqq 2$. 又, (1.1) より $\mu(\mathfrak{a}) \geqq 2$. 故に $\ell(\mathfrak{a}) = \mu(\mathfrak{a}) + \ell(\mathfrak{a}\mathfrak{m}) \geqq 4$, 従って $t(\mathfrak{a}) \leqq 5/4$. //

上のことから, $T(R) > 1$ となる例で, できる限り「小さい」ものを作るとすれば, $\ell(R) = 7$, $\mathfrak{m}^3 = 0$, $\mu(\mathfrak{m}) = 4$ でなければならない。この様な例は実際に存在する。

(2.8) <u>Example</u> (S. Endo)

K を体, X, Y, Z, W を不定文字とし, $R = K[X, Y, Z, W]/(X^2, Y^2, Z^2, W^2, XZ, XW, YZ, YW) = K[x, y, z, w]$ とすると, $\mathfrak{m} = (x, y, z, w)$, $\mathfrak{m}^2 = (xy, zw)$, $\mathfrak{m}^3 = 0$ で. $\ell(R) = 7$. $\mathfrak{a} = (x+z, y+w)$ とすると $\mathfrak{a}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2 = (0:\mathfrak{a})$ で $\ell(\mathfrak{a}) = 4$, $\ell(0:\mathfrak{a}) = 2$. 従って $t(\mathfrak{a}) = 5/4$. 故に (2.7) より $T(R) = 5/4$. //

§3. <u>おわりに.</u>

T を不定文字とし, $R[t] = R[T]/(T^2)$ とする。このとき, $T(R) \leqq T(R[t])$ であることは容易にわかる。

(3.1) <u>Problem</u>

$T(R) \lneqq T(R[t])$ となる例は存在するか?

筆者は，いくつかの例についてあたってみたが，その様な例を見つけることはできなかった。(2.8) の例についても，$T(R) = T(R[x])$ である。

一般に，ネーター局所環 $(R, \mathfrak{m})$ に対しても，$T(R) = \operatorname{Sup} T(R/\mathfrak{q})$，ここで $\mathfrak{q}$ は R のパラメータ・イデアルすべてを動く，として $T(R)$ を定義しよう。このとき，

(3.2) <u>Problem</u>

(1) $T(R) = T(R[[X]])$?

(2) $T(R) < \infty$?

これに関して，Goto-Suzuki [4] によれば，R の type $t(R) = \operatorname{Sup}_{\mathfrak{q}} (R/\mathfrak{q})$ は $\dim R \leqq 3$ のときは有限であり，従って $T(R) < \infty$ であることはわかるが，$\dim R \geqq 4$ では，Goto-Suzuki は $t(R) = \infty$ となることがあることを示しているが，上の $T(R)$ についてはどうであろうか？

最後に，

(3.3) <u>Problem</u>

$T(R) = 1$ となる局所環 R を characterize せよ。

この場合，R を Cohen-Macaulay と仮定して考える

のが自然であろう。この様なものを考えることは，Gorenstein と Cohen-Macaulay の間をうめるものとして，意味のないことではないと思うのだが…．

References

1 W.Gröbner, Über Irreduzible Ideale in Kommutative Ringen, Math. Ann., 110(1934).

2 E.Matlis, Injective modules over noetherian rings, Pacific J. Math., 8(1958).

3 T.H.Gulliksen, On the length of faithful modules over Artinian local rings, Math. Scand.,31(1972).

4 S.Goto-N.Suzuki, Index of reducibility of parameter ideals in a local ring, J.Algebra, 87(1984).

5 T.Ishikawa, On the length of modules over Artinian local rings, Tokyo J. Math., in press.