数理解析研究所講究録
第543巻 1985年 104-112

環のfibre productの応用

高知大理 小駒哲司 (Tetsushi Ogoma)

次の問を考える。

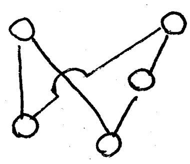
問 1. 環Aが universally catenary であれば、A は codimension function, すなわち $\varphi: \operatorname{Spec} A \longrightarrow \mathbb{Z}$ で $\varphi(\mathfrak{p})-\varphi(\mathfrak{q})=\operatorname{ht} \mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ $(\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q})$ を満たすもの、をもつか?

この発端は次のことからである。よく知られているように Aが dualizing complex をもてば、Aは (1) universally catenary (2) codimension function をもつ (3) canonical module をもつ (4) formal fibre が Gorenstein (5) どんな有限生成 A-algebra B についても Gorenstein locus GorB が SpecB の Zariski open set となる、等が成立する。

逆に、local の場合には、本質的に (1),(3),(4) の性質をもてば、Aは dualizing complex をもつことを[3]で示した。これを local でない場合にも拡張したいわけであるが、この場合(4)の代わりに、(4)+(5)が必要となることはすぐわかるが

(1)の代わりに、(1)+(2)が本当に必要となるかというのが、この問である。

Aがlocal又はdomainの場合は、問1が肯定的であることはすぐわかる。反例が作れるとして、最も簡単なものと考えられるのは、素ideal鎖の内に右図を含むものであろう。但しここで  は、○が素idealで上が下を含みかつこの間には素idealが存在しないことを意味する。



もう一つの問を考えるのに、次の定義を思い出しておこう。

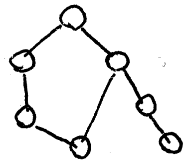
A-module Mがlocal ring Aのbig Cohen Macaulay moduleとは、M-sequence $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n=\dim A$)が存在して、$M/(a_1,\dots,a_n)M \neq 0$ となる時に言う。M-sequenceになるかどうかということは、$a_1,\dots,a_n$ の順序等にも依存するので、正確にはMは $a_1,\dots,a_n$ についてbig Cohen Macaulay moduleということになる。

さて、Mがbalanced big Cohen Macaulay A-module (b.b.C-M A-moduleと略す)であるとは、MがAのどんなsystem of parameters (s.o.pと略す)についても、big Cohen Macaulay moduleとなる時に言う。

問 2. (R.Y. Sharp [6, Problem 3.11, P246])

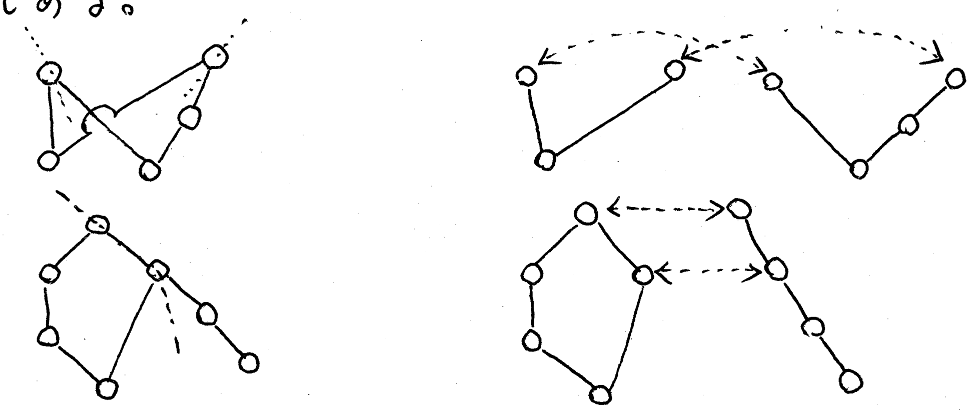
Aをlocal ring, Mをb.b. C-M A-moduleとする。素ideal $\mathfrak{p}$がある M-sequence $a_1, \dots, a_r$について、$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\, M/(a_1, \dots, a_r)M$となるとしよう。このとき局所化$M_{\mathfrak{p}}$は b.b. C-M $A_{\mathfrak{p}}$-moduleとなるか?

Aがcatenary domainの場合には、肯定的であることを、Sharp自身が示している[5, (4.3) Theorem]。もし反例があるとすれば、次のような素ideal鎖を持つ環が最も簡単なものであろう。



以上のような例を、今まで知られている例を使って、統一的に作れないか、というのが本稿の主題であるが、一般論の詳細は他稿に譲り、例の構成を中心にして話を進めよう。

さて、素朴なアイデアは、下図のように切り離した2つの環から、同一視によって元の環を構成できないか、ということである。



ここで参考になった事柄は、2つの平面が交わるvarietyは2つの平面を交差線で同一視したものと考えられるが、函数環の方で見れば、それは交差線で定義されるSpecのclosed set上の素idealを同一視していることに他ならない。そして、この同一視は函数環においてはfibre productで得られるという事実である。

そこでfibre productについて思い出してみよう。category $\mathcal{C}$において、与えられた2つのmorphism $A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_0 \xleftarrow{\varphi_2} A_2$ に対し、可換図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & A_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \\ A_2 \arrow[r, "\varphi_2"] & A_0 \end{tikzcd}$$

がfibre productであるとは任意の可換図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & A_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \\ A_2 \arrow[r, "\varphi_2"] & A_0 \end{tikzcd}$$

について、morphism $X \longrightarrow A$ がただ一つ存在して

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rrd, bend left] \arrow[dr, dashed] \arrow[ddd] & & \\ & A \arrow[r] \arrow[ddl] & A_1 \arrow[dd] \\ & & \\ A_2 \arrow[rr] & & A_0 \end{tikzcd}$$

が可換となるときに言う。

$\mathcal{C}$が環(単位元をもつ可換環)のcategoryの場合には、fibre product A は直積 $A_1 \times A_2$ の部分環として

$$A = \{(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2 \mid \varphi_1(a_1) = \varphi_2(a_2)\} \quad \cdots (*)$$

で与えられることはよく知られている。これを $A_1 \times_{A_0} A_2$ と書く。

以下、記号を常に次の意味で使うことにする。環準同型の

可換図式 $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{P_1} & A_1 \\ {\scriptstyle P_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_1} \\ A_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & A_0 \end{array}$ について、$\Phi = \varphi_1 \circ P_1 = \varphi_2 \circ P_2$,

$C = \varphi_1(A_1) \cap \varphi_2(A_2) \subseteq A_0$

$\mathfrak{a}_i = \mathrm{Ker}\,\varphi_i \quad (i=1,2)$

$V_0 = \{\Phi^{-1}(\mathfrak{z}) \mid \mathfrak{z} \in \mathrm{Spec}\,C\}$, $V_i = \{P_i^{-1}(\mathfrak{z}) \mid \mathfrak{z} \in \mathrm{Spec}\,A_i,\ \mathfrak{z} \not\supseteq \mathrm{Ker}\,\varphi_i\}$ $(i=1,2)$ とおく。

定理 1. A が fibre product $A_1 \times_{A_0} A_2$ であれば、次のことが成立する。

$\mathrm{Spec}\,A = V_0 \cup V_1 \cup V_2$ であり、V_0 は closed set であって $\mathrm{Spec}\,C$ に同型である。$\mathrm{Spec}\,A - V_0$ は $\mathrm{Spec}\,A$ の open set V_1 と V_2 の disjoint union でありかつ V_i は $\mathrm{Spec}\,A_i$ の $\mathfrak{a}_i$ で定義される open set とも同一視される。一方 $V_0 \cup V_i \simeq \mathrm{Spec}\,P_i(A)$ でありかつ $P_i(A) = A_i \times_{A_0} C = \varphi_i^{-1}(C)$ とも表わされる。$(i=1,2)$

証明については、key Lemma が次のものであることのみを述べるに止める。詳細は [4] を見て下さい。

補題 $A = A_1 \times_{A_0} A_2$, F が flat な A-algebra であれば、次が成立。

$$F = A_1 \otimes_A F \times_{A_0 \otimes_A F} A_2 \otimes_A F$$

系 定理 1 において、φ_1, φ_2 が共に全射であれば、$\mathrm{Spec}\,A$ は $\mathrm{Spec}\,A_1$ と $\mathrm{Spec}\,A_2$ を closed set $\mathrm{Spec}\,A_0$ ではり合わせたものである。

本稿の例の構成には直接必要ではないが、fibre product の noether 性について、参考の為に次の結果を挙げておく[4]。

定理 2. A_1 と A_2 が noether 環であれば、$A_1 \times_{A_0} A_2$ が noether 環となる必要十分条件は次の2つである。

(1) $C = \varphi_1(A_1) \cap \varphi_2(A_2)$ が noether 環

(2) $\mathfrak{a}_1/\mathfrak{a}_1^2$ と $\mathfrak{a}_2/\mathfrak{a}_2^2$ が共に finite C-module.

例 1. codimension function を持たない universally catenary ring。

$(R, \mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1)$ を semilocal domain で、局所化 $R_{\mathfrak{m}_1}$, $R_{\mathfrak{n}_1}$ の次元がそれぞれ m と n $(m > n)$ の正則局所環となり、剰余環が同型 $R/\mathfrak{m}_1 = R/\mathfrak{n}_1 = K$ となるものとしよう。存在は、永田 [1, Example 2] により知られている。

$(S, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}_2)$ を K 上の多項式環 $K[x_1, .., x_s]$ $(s \geq 1)$ の2つの極大 ideal での局所化で、$S/\mathfrak{m}_2 = S/\mathfrak{n}_2 = K$ となるような semilocal ring とする。したがって $\dim S_{\mathfrak{m}_2} = \dim S_{\mathfrak{n}_2} = s$。

さて、自然な環準同型 $\varphi_1 : R \longrightarrow R/(\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{n}_1) = K \times K$ と $\varphi_2 : S \longrightarrow S/(\mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{n}_2) = K \times K$ を $\varphi_1^{-1}(K \times 0) = \mathfrak{m}_1$, $\varphi_1^{-1}(0 \times K) = \mathfrak{n}_1$, $\varphi_2^{-1}(K \times 0) = \mathfrak{m}_2$, $\varphi_2^{-1}(0 \times K) = \mathfrak{n}_2$ となるように定義する。そのとき、φ_1 と φ_2 の fibre product A は

2つの極大 ideal $\mathfrak{m}$ と $\mathfrak{n}$ をもつ semi-local ring であることが定理1からわかる。$\mathfrak{m}$ は $\mathfrak{m}_1$ と $\mathfrak{m}_2$ をはり合わせたものであり、$\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{n}_1$ と $\mathfrak{n}_2$ をはり合わせたものである。

A はそれぞれ $p_1: A \longrightarrow R$ と $p_2: A \longrightarrow S$ の核に対応する2つの minimal prime $\mathfrak{P}_1$ と $\mathfrak{P}_2$ を持ち、$A/\mathfrak{P}_1 = R$, $A/\mathfrak{P}_2 = S$ となることもわかる。よって、特に A は universally catenary である。

さて、今仮りに codimension function $\varphi: \operatorname{Spec} A \longrightarrow \mathbb{Z}$ が存在したと仮定しよう。$\varphi - \varphi(\mathfrak{P}_1)$ を考えることにより、$\varphi(\mathfrak{P}_1) = 0$ としてよい。すると、$A/\mathfrak{P}_1 = R$ であることから $\varphi(\mathfrak{m}) = ht\,\mathfrak{m}_1 = m$, $\varphi(\mathfrak{n}) = ht\,\mathfrak{n}_1 = n$ である。一方、$A/\mathfrak{P}_2 = S$ であることから、$\varphi(\mathfrak{P}_2) = \varphi(\mathfrak{m}) - ht\,\mathfrak{m}_2 = m - s$ であるが、他方 $\varphi(\mathfrak{P}_2) = \varphi(\mathfrak{n}) - ht\,\mathfrak{n}_2 = n - s$ でもなければならない。これは、$m > n$ であることに矛盾する。

例2　　Sharp の問題の反例

$(R, \mathfrak{m})$ を $\dim R = 3$ の local domain で、長さ2の saturated chain $0 \subset \mathfrak{P} \subset \mathfrak{m}$ をもつものとする。このような環 R の存在は知られている。[3, §III]　今、$\varphi_1: R \longrightarrow R/\mathfrak{P} = A_0$ を自然な準同型, $\varphi_2: A_0[[x, y]] \longrightarrow A_0$ を A_0-準同型で、$\varphi_2(x) = \varphi_2(y) = 0$ で定義されるものとする。

このとき、φ_1とφ_2の fibre product A を考えれば、射影 $p_1 : A \longrightarrow R$, $p_2 : A \longrightarrow A_0[[x, y]] = A_2$ の核にそれぞれ対応する素 ideal $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$ が A の minimal prime 全体となることが定理1よりわかる。

今、A-module M を $M = K(\mathfrak{q}_1) \oplus A/\mathfrak{q}_2$ $\quad (K(\mathfrak{q}_1) = A_{\mathfrak{q}_1}/\mathfrak{q}_1 A_{\mathfrak{q}_1})$ とおけば、M は b.b.C-M A-module となる。実際 $A/\mathfrak{q}_2 = A_0[[x, y]] = A_2$ は 3次元 Cohen Macaulay ring で、A のどの system of parameters の $A/\mathfrak{q}_2$ における像も $A/\mathfrak{q}_2$ の s.o.p となるから、$A/\mathfrak{q}_2$ は有限生成 b.b.C-M A-module である。一方、$z \ (\in A)$ が A の s.o.p の一部となれば、z は $K(\mathfrak{q}_1)$ の regular element でありかつ $K(\mathfrak{q}_1)/zK(\mathfrak{q}_1) = 0$ となる。よって M は b.b.C-M A-module となる。

今、A の ideal $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2$ について、$A/\mathfrak{p} = A_0$ であるから、$\mathfrak{p}$ は A の素 ideal である。さて、$b \in \mathfrak{z} - 0$ について (*) の表示で、$a_1 = (b, x)$, $a_2 = (0, y)$ とおけば、$a_1, a_2 \in A$ であって、これらは M-regular sequence となる。また

$$M/(a_1, a_2)M = K(\mathfrak{q}_1)/bK(\mathfrak{q}_1) \oplus A_2/(x, y)A_2 = A_0$$

であるから、$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A M/(a_1, a_2)M$ もわかる。

一方、$\mathfrak{p}$ における局所化 $M_{\mathfrak{p}} = K(\mathfrak{q}_1) \oplus A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}_2 A_{\mathfrak{p}}$ を考えると、$a_2 = (0, y)$, $a_1 = (b, x)$ は $A_{\mathfrak{p}}$ の s.o.p となるけれど、a_2 は $M_{\mathfrak{p}}$ の regular element ではない。すなわ

ち $M_{\mathfrak{p}}$ は、b.b. C-M $A_{\mathfrak{p}}$-module でない。

REFERENCES

[1] M. Nagata, Local rings, John Wiley, New York (1962).

[2] T. Ogoma, Non-catenary pseudo-geometric normal rings, Japan J. Math. 6 (1980) 147-163

[3] T. Ogoma, Existence of dualizing complexes, J. Math. Kyoto Univ. 24 (1984) 27-48

[4] T. Ogoma, Fibre products of Noetherian Rings and their applications, to appear in Math. Proc. Camb. Phil. Soc.

[5] R. Y. Sharp, A cousin complex characterization of balanced big Cohen Macaulay modules, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 90 (1981) 229-238

[6] R. Y. Sharp ed., Commutative Algebra: Durham 1981, London Math. Soc. Lect. Notes 72.