数理解析研究所講究録
第543巻 1985年 113-119

Symbolic Powersの定義するTopologyについて

名工大 渡辺敬一 (Kei-ichi Watanabe)

Noether環AとAの素イデアル$\mathfrak{p}$に対し，$\mathfrak{p}$の symbolic n-th powerを$\mathfrak{p}^{(n)}$と書く．$\mathfrak{p}^{(n)}$は$\mathfrak{p}^n$の$\mathfrak{p}$-primary componentである。$\{\mathfrak{p}^n\}_{n\geq 1}$と$\{\mathfrak{p}^{(n)}\}_{n\geq 1}$はA上に2つのtopologyを定めるが，

問題．いつ$\{\mathfrak{p}^n\}$と$\{\mathfrak{p}^{(n)}\}$は同じtopologyを定めるか？

筆者がこの問題を考え始めたのは、森重文氏から、この問題について質問されたのがきっかけである。最初は、Aがexcellent ringの場合などには両者が一致するのではないか？という予想の下で出発したのだが，調べてみると，むしろ"unibranch"の条件が本質的である事がわかって来た。なお，この問題に関しては、各所で森氏からadviceを受けているので，同氏との共同研究というべきものである事をお断りしておきたい．

以下，上記の問題を考えて行く。A，$\mathfrak{p}$は上記の意味で使う事にする。

(1) 一般に，$S = 1+\mathfrak{p}$，$\mathfrak{a} = \mathrm{Ker}(A \to A_{\mathfrak{p}})$，$\mathfrak{b} = \mathrm{Ker}(A \to S^{-1}A)$ とおくと，$\mathfrak{a} = \bigcap_{n>0} \mathfrak{p}^{(n)}$，$\mathfrak{b} = \bigcap_{n>0} \mathfrak{p}^{n}$ である．（[LR]，(3.11)，(7.7)）．$\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$ のときは問題にならないから，以下に於ては次を仮定しよう．

<u>仮定</u>．natural homomorphism $A \to A_{\mathfrak{p}}$ は injective である．

(2) $\mathfrak{p}^n$ の準素分解に於て，$n \gg 0$ のとき $\mathrm{Ass}(A/\mathfrak{p}^n)$ は一定である事が知られている（Brodmann [B]）ゆえに，

$$\mathfrak{p}^n = \mathfrak{p}^{(n)} \cap \mathfrak{q}_{1,n} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{s,n} \quad (n \gg 0,\ \sqrt{\mathfrak{q}_{i,n}} = \mathfrak{p}_i)$$

として良い．当然

$\{\mathfrak{p}^{(n)}\}$ と $\{\mathfrak{p}^n\}$ が同じ topology を定める $\Leftrightarrow$ $\forall n$, $\exists m = m(n)$, $\mathfrak{p}^{(m)} \subset \mathfrak{q}_{i,n}$ $(i = 1, \dots, s)$ である．

$\mathfrak{p}^{(m)} \subset \mathfrak{q}_{i,n} \Leftrightarrow \mathfrak{p}^{(m)} A_{\mathfrak{p}_i} \subset \mathfrak{q}_{i,n} \cdot A_{\mathfrak{p}_i}$ だから，$B = A_{\mathfrak{p}_i}$ とおいて，$\forall n > 0$，$\exists m(n)$，$\mathfrak{p}^{(m)} B \subseteq \mathfrak{m}^n B$（$\mathfrak{m}$ は B の極大 ideal）が云えれば良い．ここで次の "Chevalley の定理" が本質的である．

<u>定理</u>（Chevalley，[LR]．(30.1)）$(A, \mathfrak{m})$ <u>complete</u> local ring，$\{\mathfrak{a}_n\}$: ideal の descending chain で，$\bigcap_{n \geq 0} \mathfrak{a}_n = (0)$ のとき，$\forall n > 0$，$\exists m = m(n)$ s.t. $\mathfrak{a}_m \subset \mathfrak{m}^n$.

従って，$\mathfrak{p}$ を local ring $(A, \mathfrak{m})$ の素 ideal とするとき，
もし $\bigcap_{n>0}(\mathfrak{p}^{(n)}\cdot\hat{A}) = (0)$ なら，$\forall n>0$，$\exists m = m(n)$，$\mathfrak{p}^{(m)} \subset \mathfrak{m}^n$
だし，逆に $\{\mathfrak{p}^{(n)}\}$ と $\{\mathfrak{p}^n\}$ が同じ topology を定義すれば，
$\bigcap_{n>0}\mathfrak{p}^n\hat{A} = (0)$ より当然，$\bigcap_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}^{(n)}\hat{A} = (0)$．まとめると，

(3) $\{\mathfrak{p}^n\}$ と $\{\mathfrak{p}^{(n)}\}$ が同じ topology を定義する
$\Longleftrightarrow$ $\forall \mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}^*(\mathfrak{p}) \overset{\mathrm{def.}}{=} \mathrm{Ass}(A/\mathfrak{p}^n)$ $(n \gg 0)$，$\bigcap_{n>0}\mathfrak{p}^{(n)}\cdot(A_{\mathfrak{q}})^\wedge = 0$.
$\Longleftrightarrow$ $\forall \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)$，$\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}$，$\bigcap_{n>0}\mathfrak{p}^{(n)}\cdot(A_{\mathfrak{q}})^\wedge = 0$．

系1.([Z-S], VIII, §5, Co5) もし $\forall \mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}^*(\mathfrak{p})$，$(A_{\mathfrak{q}})^*$ が integral domain ならば，$\{\mathfrak{p}^n\}$ と $\{\mathfrak{p}^{(n)}\}$ は同じ topology を定める．

系2. A が excellent normal domain のとき，任意の素イデアル $\mathfrak{p} \subset A$ について，$\{\mathfrak{p}^n\}$ と $\{\mathfrak{p}^{(n)}\}$ は同じ topology を定める．

($\because$) A が excellent normal domain のとき，$\forall \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)$，$(A_{\mathfrak{q}})^\wedge$ も normal domain である．([M]，(33.I))．

従って次の問題は，$\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}$ に対し，$\bigcap_{n>0}\mathfrak{p}^{(n)}\cdot(A_{\mathfrak{q}})^\wedge = (0)$?
という事だが，もう少し一般化して，次がえる．

(4) $A \longrightarrow B$: flat ring hom. of noetherian rings，$\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$
に対して次の条件は同値

(i) $\bigcap_{n>0}\mathfrak{p}^{(n)}\cdot B = (0)$

(ii) $S = B - \bigcup_{\mathfrak{P} \in \mathrm{Ass}_B(B/\mathfrak{p}B)}\mathfrak{P}$ とおくとき，natural homomorphism

$B \longrightarrow S^{-1}B$ は injection.

(iii) $\forall \mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_B(B)$, $\exists \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_B(B/\mathfrak{g}B)$, $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q}$.

(証明) (ii) $\Rightarrow$ (i) $x \in \bigcap_{n>0} \mathfrak{g}^{(n)} \cdot B \Rightarrow x/1 \in \bigcap_{n>0} \mathfrak{g}^{(n)} \cdot S^{-1}B$.

$A-\mathfrak{g} \subset S$ だから $\mathfrak{g}^{(n)} \cdot S^{-1}B = \mathfrak{g}^n \cdot S^{-1}B$, $\mathfrak{g} \subset \mathrm{Rad}(S^{-1}B)$ より,

$\bigcap_{n>0} \mathfrak{g}^{(n)} \cdot S^{-1}B = 0$. $B \to S^{-1}B$ は injection より $x=0$.

(iii) $\Leftrightarrow$ (ii) $B \to S^{-1}B$ が injection $\Leftrightarrow$ $\forall \mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_B(B)$, $\mathfrak{q} \cap S = \phi$.

よりあきらか.

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\exists x \neq 0 \in B$, $sx = 0$ $(\exists s \in S)$ としよう. $A \to B$

は flat だから, $\mathrm{Ass}_B(B/\mathfrak{g}^{(n)}B) = \mathrm{Ass}_B(B/\mathfrak{g}B)$. $sx \in \mathfrak{g}^{(n)}B \Leftrightarrow x \in \mathfrak{g}^{(n)}B$

より, $x \in \bigcap_{n>0} \mathfrak{g}^{(n)}B$

(5) [反例] $\{\mathfrak{g}^n\}$ と $\{\mathfrak{g}^{(n)}\}$ が同じ topology を定義 <u>しない</u> 例を

作るためには, unibranch <u>でない</u> 環を考える必要がある.

<u>例</u>. $A = k[x, y, z]/(y^2 - x^2(x+1))$ (k は体, $\mathrm{ch}(k) \neq 2$)

とおくと $\mathrm{Spec}(A)$ は nodal curve C と line $\mathbb{A}^1_k$ の直積で,

A は domain だが, $\mathfrak{m} = (x, y, z)$ とおいて, $(A_{\mathfrak{m}})^\wedge$ は C の $(0,0)$

に於ける 2 つの branches に対応する 2 つの minimal primes をも

つ。また, A の integral closure $A' \cong k[t, z]$ で, $A \hookrightarrow A'$ は

$x = t^2 - 1$, $y = t(t^2-1)$ で def. される。このとき, $\mathfrak{g}' = \varphi(x, z) \cdot A'$,

を A' の素イデアル, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \cap A$ とおき $\varphi(1,0) = 0$ 又は $\varphi(-1,0)$

$= 0$ のどちらかが成立するとする ($\Leftrightarrow \mathfrak{g} \subset \mathfrak{m}$)。こう置くと,

$\{\mathfrak{q}^n\}$ と $\{\mathfrak{q}^{(n)}\}$ が同じ topology を定める $\Leftrightarrow$ $\varphi(1,0)=\varphi(-1,0)=0$.

証明はもっと一般化した形で与えよう.

(6) 定理. A : excellent Noeth. domain, A' を A の normalization, $\mathfrak{q}$ を A の prime ideal とするとき, 次は同値.

(a) $\{\mathfrak{q}^n\}$ と $\{\mathfrak{q}^{(n)}\}$ は同じ topology を定義する.

(b) A の prime $\mathfrak{P}\supset\mathfrak{q}$ と A' の prime $\mathfrak{P}'$ で $\mathfrak{P}'\cap A=\mathfrak{P}$ であるものに対し, A' の prime $\mathfrak{q}'\subset\mathfrak{P}'$ で, $\mathfrak{q}'\cap A$ なるものが存在する。

(証明の前に excellent local domain の性質をいくつかあげる。) $1^\circ\sim3^\circ$ に於て $(A,\mathfrak{m})$ は excellent local domain, A' は A の normalization とする.

1°. $\hat{A}$ は reduced で, $\forall\mathfrak{P}\in\mathrm{Min}(\hat{A})$, $\dim\hat{A}/\mathfrak{P}=\dim\hat{A}$.

2°. $\forall\mathfrak{n}\in\mathrm{Max}(A')$, $\mathrm{ht}(\mathfrak{n})=\dim A$.

3°. $\mathrm{Min}(\hat{A})$ と $\mathrm{Max}(A')$ の間には自然な 1:1 対応がある. $(A')^\wedge\cong A'\otimes_A\hat{A}\cong\prod_{\mathfrak{n}\in\mathrm{Max}(A')}(A'_\mathfrak{n})^\wedge$, 各 $(A'_\mathfrak{n})^\wedge$ は local domain だから, $\mathrm{Spec}((A'_\mathfrak{n})^\wedge)$ の generic point の行先を $\mathfrak{P}\in\mathrm{Min}(\hat{A})$ とする事で, $\mathfrak{n}\in\mathrm{Max}(A')$ と $\mathfrak{P}\in\mathrm{Min}(\hat{A})$ の対応が得られる. (1° は [M], (14C) Th23 (2nd ed.), 2° は 1° よりすぐ出る。)

((6) の証明). (a)$\Rightarrow$(b) prime $\mathfrak{P}\supset\mathfrak{q}$ をとる. $A_\mathfrak{P}$ を改めて A とおき, $\mathfrak{n}\in\mathrm{Max}(A')$ とする。$\mathfrak{n}$ に対応する $\mathfrak{P}\in\mathrm{Min}(\hat{A})$ に対して, (4) より, $\exists\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}_{\hat{A}}(\hat{A}/\mathfrak{q}\hat{A})$, $\mathfrak{p}\supset\mathfrak{P}$. $\mathfrak{p}'\in\mathrm{Spec}((A'_\mathfrak{n})^\wedge)$

を $\mathfrak{p}'\cap\hat{A}=\mathfrak{p}$ にとり, $\mathfrak{p}'\cap A'=\mathfrak{q}'$ とおくと, $\mathfrak{q}'\subset\mathfrak{n}$, $\mathfrak{q}'\cap A=\mathfrak{q}$ だから, (a) がいえた.

(b) $\Rightarrow$ (a)　$\forall\mathfrak{Q}\supset\mathfrak{q}$, $\bigcap_{n>0}\mathfrak{q}^{(n)}(A_{\mathfrak{Q}})^\wedge=(0)$ がいえれば良い。$A_{\mathfrak{Q}}$ を A でおきかえて, $(A,\mathfrak{m})$ を local とし, $\bigcap_{n>0}\mathfrak{q}^{(n)}\hat{A}=(0)$ を示す. (4)(iii) の条件を $B=\hat{A}$ に対し示す. $\mathfrak{Q}\in\mathrm{Min}(\hat{A})$ と対応する $\mathfrak{n}\in\mathrm{Max}(A')$ をとる。(b) より, $\exists\mathfrak{q}'\in\mathrm{Spec}(A')$, $\mathfrak{q}'\subset\mathfrak{n}$ かつ $\mathfrak{q}'\cap A=\mathfrak{q}$. 2° より $\mathrm{ht}\,\mathfrak{q}'=\mathrm{ht}\,\mathfrak{q}$ である。
$\mathfrak{p}'\in\mathrm{Spec}((A'_{\mathfrak{n}})^\wedge)$ を $\mathfrak{p}'\cap A'=\mathfrak{q}'$, $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}'=\mathrm{ht}\,\mathfrak{q}'$ にとり, $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{p}'$ の $\hat{A}$ での image とすると, $\mathfrak{p}\supset\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{p}\cap A=\mathfrak{q}$, かつ $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}=\mathrm{ht}\,\mathfrak{q}$ だから, $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}_{\hat{A}}(\hat{A}/\mathfrak{q}\hat{A})$.　(証明終).

(7) [付録] symbolic power のからんだ別の問題で,

問. $\bigoplus_{n\geq 0}\mathfrak{q}^{(n)}$ はいつ Noether 環になるか?

というのがある。もし $\bigoplus_{n\geq 0}\mathfrak{q}^{(n)}$ が Noether 環なら, ある $N>0$ に対し, $\mathfrak{q}^{(mN)}=(\mathfrak{q}^{(N)})^m$ $(\forall m\geq 1)$ が成立するから, 勿論, $\{\mathfrak{q}^n\}$ と $\{\mathfrak{q}^{(n)}\}$ は同じ topology を定める. 逆の成立しない例としては,

<u>定理</u> ([R] 参照). $(A,\mathfrak{m})$: 2次元 local domain, normal, $\mathfrak{q}\subset A$: ht 1 prime のとき, $\bigoplus_{n\geq 0}\mathfrak{q}^{(n)}$ が Noetherian $\Longleftrightarrow$ $\exists N>0$, $\mathfrak{q}^{(N)}$ が単項生成.

をあげれば十分であろう。A が excellent のとき, $\{\mathfrak{q}^n\}$ と

$\{\mathfrak{g}^{(n)}\}$ は常に同じ topology を定めるのに対し，$\mathfrak{g}^{(N)}$ が単項生成になる $\mathfrak{g}$ は，一般の A に於ては特殊なものだから．

［あとがき］（5）の反例は松村英之先生より別の問題に対して与えられた反例がこの場合も反例となる事がわかったものです．また，(6) に関してと（3)系1の存在については，後藤四郎氏より助言を頂きました。

References.

[B] M. Brodmann : Asymptotic stability of Ass (M/I^nM), Proc. AMS $\underline{74}$ (1979), 16～18

[LR] M. Nagata ; Local Rings.

[M] H. Matsumura : Commutative Algebra.

[R] D. Rees : On a problem of Zariski, Ill. J. Math. $\underline{2}$ (1958), 145～149.

[Z-S]. O. Zariski and P. Samuel : Commutative Algebra. vol. II.