数理解析研究所講究録
第 543 巻 1985 年 164-168

Reesによる一般元の定義と基本定理

名大 理　渡辺純三(Junzo Watanabe)

Reesの定義した一般元に関する1つの初等的な(また、最も基本的と思われる)結果を紹介する。

「加群の長さ=重複度」と言う直感に訴えるなら、この結果そのものは全く当然であり、一見、自明とも思えるのだが、証明は意外にも難しく、ある種の工夫が必要である。Rees自身、これは決して自明でないと言っていた。以下に述べる定理2の証明はReesのアイディアによるものだが相当の補足を加えてある。

以下、$(R, \mathfrak{m}, k)$ をネーター的局所環とする。$\mathfrak{m}$ の元 $m_1, m_2, \cdots, m_t$ に対して、t個の独立変数 $X_1,\cdots,X_t$ を導入し、Rの忠実平坦拡大 $R \to R_1 = R(X_1,\cdots,X_t)$ を考える。即ち、R_1 は多項式環 $R[X_1,\cdots,X_t]$ の $\mathfrak{m}R[X_1,\cdots,X_t]$ での局所化である。
今、$Y = X_1m_1 + X_2m_2 + \cdots + X_tm_t$ とおく。このとき、任意の $y \in (m_1,\cdots,m_t)$ (即ち、$y = x_1m_1 + \cdots + x_tm_t$, $x_i \in R$) と任意の $\mathfrak{m}$-準素イデアル $\mathfrak{a}$ に対して、次の不等号が成立する。(定理1. ℓは長さを表わす。)

定理 1.
$$\ell(R/\mathfrak{a}+yR) \geq \ell_{R_1}(R_1/\mathfrak{a}R_1 + YR_1).$$

証明. Rをアルチン環とし、$\mathfrak{a} = 0$ として十分である。更に、$R(X_1,\cdots,X_t) = R(X_1,\cdots,X_{t-1})(X_t)$ だから、t に関する帰納法を使えば、次の補題に帰着する。

補題．$(R, \mathfrak{m}, k)$をアルチン環とし、$m_1, m_2 \in \mathfrak{m}$ とする。 X を1つの変数とすれば、任意の $x \in R$ について、

$$\ell_R(R/xm_1 + m_2) \geqq \ell_{R_1}(R_1/(Xm_1 + m_2)).$$

証明．

$$A = R[X]/(Xm_1 + m_2)R[X]$$

$$B = R(X)/(Xm_1 + m_2)R(X)$$

$\varphi : A \to B$ を自然な写像とする。

今、 $B = J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \cdots \supset J_n$ を Bの組成列とし、$\varphi^{-1}(J_i) = I_i$ とすれば、Aのイデアル列、

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n$$ を得る。

$X - x$ は B で単元だから、 $I_i : (X-x) = I_i$, $\forall i$ である。従って、 $A \to A \otimes_{R[X]} R[X]/(X-x) \simeq R$ によるI_i の自然な像を $\bar{I}_i$ とすれば、Rのイデアル列 $\bar{I}_0 \supsetneqq \bar{I}_1 \supsetneqq \bar{I}_2 \supsetneqq \cdots \supsetneqq \bar{I}_n$ を得る。

これで、目標の不等号が示された。

注意．簡単にわかる事だが、定理1で言う $\ell_{R_1}(R_1/\mathfrak{a}R_1 + YR_1)$ は $m_1, \cdots, m_t$ が生成するイデアルにのみ依存し、生成系の取り方にはよらない。

定義．$\mathfrak{m} = (m_1, \cdots, m_t)$, $Y = X_1 m_1 + \cdots + X_t m_t$ とする。 $\mathfrak{a}$ を R の $\mathfrak{m}$-準素イデアルとするとき、 $y \in \mathfrak{m}$ が $\mathfrak{a}$ に対する一般元であるとは、

$$\ell_R(R/\mathfrak{a} + yR) = \ell_{R_1}(R_1/\mathfrak{a}R_1 + YR_1)$$

とする事を言う。

定理2. $k = R/\mathfrak{m}$ が無限体であれば、任意の $\mathfrak{m}$-準素イデアル $\mathfrak{a}$ につき、$\mathfrak{a}$ に対する一般元は稠密に存在する。従って有限個の $\mathfrak{m}$-準素イデアルに対して、共通の一般元が取れる。

証明. 前と同様、Rをアルチン環とし、$\mathfrak{a} = 0$ としてよい。$\mathfrak{m} = (m_1, \cdots, m_t)$ として、$S = R[X_1, X_2, \cdots, X_t]$ とおく。今、S のイデアル列、

$$S = I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_n = (Y) \text{ で、}$$

$$I_i/I_{i+1} \simeq S/P_i, \; P_i \in \mathrm{Spec}\, S$$

となるものを1つ固定する。Sの素イデアルは $\mathfrak{m}S$を含むから

$$S/P_i \simeq \frac{k[X_1, \cdots, X_t]}{\mathfrak{p}_i}, \quad \mathfrak{p}_i \in \mathrm{Spec}(k[X_1, \cdots, X_t])$$

である。

さて、上のイデアル列を局所化することで、R_1とYR_1の間のイデアル列を得るわけだが、

$$S/P_i \otimes_S R_1 \simeq \begin{cases} k(X_1, \cdots, X_t), & \mathfrak{p}_i = 0 \\ 0, & \mathfrak{p}_i \neq 0 \end{cases}$$

である。従って、

(1) $$\ell_{R_1}(R_1/YR_1) = \#\{i \mid \mathfrak{p}_i = 0\}$$

となる。

次に $x_1, x_2, \cdots, x_t \in R$ を任意に取り、$M = (X_1 - x_1, \cdots, X_t - x_t)S$ とし、特殊化 $\varphi : S \to S/M \simeq R$ を考える。

$$R = \varphi(I_0) \supset \varphi(I_1) \supset \cdots \supset \varphi(I_n) = yR$$

だが、完全列

$$0 \to I_i/I_{i+1} \xrightarrow{f_i} S/I_{i+1} \to S/I_i \to 0$$
$$I_i/I_{i+1} \cong S/P_i$$

より、

$$\varphi(I_i)/\varphi(I_{i+1}) \simeq \begin{cases} k, & S/P_i \otimes_S S/M \neq 0 \text{ かつ} \\ & f_i \otimes_S S/M \neq 0 \\ 0, & \text{上記以外の場合} \end{cases}$$

となる。従って

(2) $$\ell_R(R/yR) = \# \left\{ i \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{イ. } \mathfrak{p}_i \subset (X_1 - \bar{x}_1, \cdots, X_t - \bar{x}_t) \\ \\ \text{ロ、 } f_i \otimes S/M \neq 0 \end{array} \right\}$$

がわかった。但し、$\bar{x}_i$ は、$x_i \in R$ の $R/\mathfrak{m}$ における剰余類である。今、$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_n$ のうち、$\mathfrak{p}_i \neq 0$ なるものの共通部分を $\mathfrak{b}$ とおく。即ち、$\mathfrak{b} = \bigcap_{\mathfrak{p}_i \neq 0} \mathfrak{p}_i$.

$x_1, x_2, \cdots, x_t \in R$ が、$(X_1 - \bar{x}_1, \cdots, X_t - \bar{x}_t) \not\supset \mathfrak{b}$ を満たせば、(2)の右辺の条件 イ を満たすイデアルは $ht = 0$ のものだけである。

よって、(1)の右辺は(2)の右辺を含む。即ち、

$$\ell_{R_1}(R_1/YR_1) \geqq \ell_R(R/yR)$$

である。逆向きの不等号は定理1で示したから、結局、$(X_1-\bar{x}_1,\cdots,X_t-\bar{x}_t) \not\ni \mathfrak{b}$ である限り

$$y = x_1 m_1 + \cdots + x_t m_t$$

が $\mathfrak{a}$ に対する一般元である。　証明終り。

注意2.　$\mathfrak{m} = (m_1, m_2, \cdots, m_t)$ のとき $Y = X_1 m_1 + \cdots + X_t m_t$ は一般的1次形式とも言うべきものだろう。$\mathfrak{m}^n$ の生成系を $m_1, \cdots, m_t$ とすれば、「一般的 n 次形式」が定義できる。
この様な形式を同時に考える場合は、無限個の独立変数 $X_1, X_2, \cdots$ を導入して
$R_1 = R(X_1, X_2, \cdots)$ の中で議論すればよい。(この R_1 もネーター的である。)
Reesの元の定義はその様になっている。(D. Rees, General elements of ideals in local rings., 数理研講究録484,1983.)