数理解析研究所講究録
第 544 巻 1985 年 1-11

convex function のなす空間の順序について (Order relation on a space of convex functions)

北大理学部　　越 昭三 (Shozo Koshi)

1. Introduction　Convex function の conjugate function に関する基本定理に Moreau-Rockfellar の定理がある。確率的に convex function が与えられたときの平均 function とその conjugate (dual) function との関係を表わす定理を作ることを目的とする。

2. 定義　話を簡単にするために、ここで考える function は実数空間 $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ への対応とする。勿論ここでの議論は大半 $\mathbb{R}$ の代りに separative locally convex topological vector space 上の function で考えてよい。

定義 1　$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ が convex とは

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$$

が $\alpha, \beta \in [0, 1]$, $\alpha + \beta = 1$ かつ $x, y \in \mathbb{R}$ で成立することである。

定義2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ が proper とは $f(x) < +\infty$ となる $x \in \mathbb{R}$ が少くとも一つ存在すること。更に $\mathcal{D}(f) = \{x ; f(x) < +\infty\}$ を f の effective domain と呼ぶ。effective domain は convex set になる。

定義3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ のとき

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{ yx - f(x) \}$$

を f の conjugate function と呼ぶ。f が convex proper function のとき f^* は同じ性質をみたす。一般に

$$f(x) \geqq f^{**}(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

である。

$$f(x) = f^{**}(x)$$

となるための必要十分条件は f が x で lower semi-continuous になることである。一般には高々2つの x の値を除いて $f(x) = f^{**}(x)$ となる。($\mathbb{R}$ の場合)

定義4. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ の proper な convex function の全体を $\mathbb{C}$ で表わす. $\mathbb{C}$ は convex set でないが $f \in \mathbb{C}$, $\alpha \geqq 0 \Rightarrow \alpha f \in \mathbb{C}$ であり $f, g \in \mathbb{C}$, $\mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$

$\neq \phi$ で $\alpha, \beta \geqq 0$ ならば $\alpha f + \beta g \in \mathbb{C}$ となる。

3. $\mathbb{C}$ の性質　　$\mathbb{C}$ は通常の order で半順序集合になる。

1) $\mathbb{C}$ は conditionally complete な ordered set である。$\mathbb{C} \ni f, g$ に対し f と g との最小上界が存在するときは $f \sqcup g$ で表わし，f と g との最大下界が存在するときは $f \sqcap g$ とで表わす。

2) $\mathbb{C} \ni f, g$ に対し，$f \sqcup g$ が存在して $\mathbb{C}$ の要素となるための必要十分条件は

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad f(x), g(x) < +\infty$$

即ち $\mathfrak{D}(f) \cap \mathfrak{D}(g) \neq \phi$ となることである。

3) $\mathbb{C} \ni f_\lambda \ (\lambda \in \Lambda)$ に対し，$\bigsqcup_\lambda f_\lambda$（$f_\lambda$ の最小上界）が存在するための必要十分条件は

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad \sup_\lambda f_\lambda(x) < +\infty$$

4) つぎの式はもしも左辺又は右辺が存在したときに成立する．$f,\ f_\lambda \in \mathbb{C}$ として

$$f \sqcap \left(\bigsqcup_\lambda f_\lambda \right) = \bigsqcup_\lambda (f \sqcap f_\lambda)$$

$$f \sqcup \left(\bigsqcap_\lambda f_\lambda \right) = \bigsqcap_\lambda (f \sqcup f_\lambda)$$

ここで $\bigsqcap_\lambda f_\lambda$ は $\{f_\lambda\}$ の最大下界を表わす。

5) $f_n \downarrow f \in \mathbb{C}$ のとき，$f_n^* \uparrow f^*$ が成立する。

証明） $f_n(x) \downarrow f(x)$ for all $x \in \mathbb{R}$ であるから

$$f^*(y) = \sup_x \{yx - f(x)\} = \sup_x \sup_n \{yx - f_n(x)\}$$

$$= \sup_n \sup_x \{yx - f_n(x)\}$$

$$= \sup_n f^*(y)$$ （証明了）

6) $f_n \uparrow f \in \mathbb{C}$ のとき $f_n^* \downarrow f^*$ は一般に成立しない。しかし $f^* \leqq \inf_n f_n^*$ が成立し，高々2点の y を除いて

$$f_n^*(y) \downarrow f^*(y)$$

が成立する。

証明は Fenchel-Moreau の定理を用いて出す。

つぎの example は除外点のあるものである。

$$f_n(x) = \begin{cases} -x & \text{for } x \leqq 0 \\ -\frac{1}{n}x & \text{for } 0 \leqq x \leqq n \\ 1 & \text{for } x \geqq n \end{cases}$$

のとき $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ は

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{for } x \leqq 0 \\ 0 & \text{for } x \geqq 0 \end{cases}$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty} f_n^*(0) \neq f^*(0)$$

となる。

7) $f \in \mathbb{C}$, $\lambda > 0$ のとき

$$(\lambda f)^*(y) = \lambda f^*\left(\frac{y}{\lambda}\right)$$

$$(f + \alpha)^*(y) = f^*(y) - \alpha$$

$f, g \in \mathbb{C}$ に対して，つぎの *infimal convolution* を定義する。

$$(f \square g)(x) = \inf\{f(x_1) + g(x_2) \,;\, x_1 + x_2 = x\}$$

このとき，つぎの Moreau-Rockafellar の公式が成立する。 $f \square g \in \mathbb{C}$ である。

$$(f \,\square\, g)^*(y) = (f^* + g^*)(y)$$

$$(f + g)^*(y) \leqq (f^* \,\square\, g^*)(y)$$

しかし，上の式は高々２点の y を除いて，等号が成立する。

4. Moreau－Rockafellar の定理の一般化

Ω を有限測度空間（簡単のためで一般の測度空間でも或程度成立する），$P(\Omega)$ を Ω から $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 値 measurable function のなす空間，$S(\Omega)$ を Ω から $\mathbb{R}$ 値 measurable function のなす空間とする。$\mathbb{R}$ から $P(\Omega)$ への convex operator F を考える。すなわち

$$F(\alpha x + \beta y) \leqq \alpha F(x) + \beta F(y)$$

$$\alpha, \beta \in [0, 1], \quad \alpha + \beta = 1, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

ここで不等号は $P(\Omega)$ の中での順序，すなわち measure zero を除いて一致する $P(\Omega)$ の要素は同一視することとするので，measure zero を除いての大小関係とする。

一般的には，convex operator の値域は vector space を考えるのが普通であるが，Young－Fenchel 変換を考えるとすると，vector space をそのまゝにしては都合が

悪くなるのである。ordered vector spaceを値域にするような理論はないわけではないが，理論（convex analysisの）を作るためには若干不備な点がある。

さて，Fの表現定理を作る必要がある。

定理　$F(x) \in S(\Omega)$となる$x \in \mathbb{R}$が少くとも一つ存在したとする。このとき$\mathbb{R} \times \Omega$上の函数$F(x, t)$がつぎの性質をもつように作ることができる。

i)　$\exists$ measure zero set $A \subset \Omega$があって，$t \notin A$ならば函数$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow F(x, t)$がproperなconvex functionである。

ii)　すべての$x \in \mathbb{R}$に対して，つぎの函数（Ω上の）

$$\Omega \ni t \longrightarrow F(x, t)$$

はΩの可測函数である。

iii)　すべての$x \in \mathbb{R}$に対し，Ω上の函数としての$F(x,t)$は

$$F(x, t) = F(x) \quad (\ P(\Omega) \text{の要素として})$$

となる。

ここで，$F(x, t)$はすべて各$t \in \Omega$に対してxのconvex functionであると仮定することができる．したがって，Fのconjugate functionのsystem $\{F^*(y, t)\}$が考えられ

る。さて，$F(x,t)$ の平均 convex function と dual の system $\{F^*(y,t)\}$ で表現するための条件を求めることとする。

基本 lemma　$f_n \in \mathbb{C}$，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in \mathbb{C}$ のとき，f の effective domain $\mathcal{D}(f)$ に内点があるとき，

$$\lim_{n\to\infty} f_n^*(y) = f^*(y)$$

が高々2点の y を除いて，成立する。

注意　$\mathcal{D}(f)$ に内点のないときには，もっと別の $\mathbb{C}$ における位相を考えないと収束に関する必要十分条件がでない。

この lemma の証明には，つぎの lemma が必要である。

lemma　$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in \mathbb{C}$　$(f_n \in \mathbb{C})$

$[a, b] \subset \mathrm{Int}\{\mathcal{D}(f)\} = \{\mathcal{D}(f)$ の内点の集まり$\}$ ならば

f_n は f に $[a, b]$ で一様に収束する。

更に $[a, b]$ で一様 Lipschitz である。（この性質は基本 lemma の証明に必要でないが，convex function の収束性の一つの特徴を与えている。）

つぎに，有限個の convex function $f_1, f_2, \cdots, f_n$ に対し，その Harmonic sum を定義する。$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ を正数として

$$\lambda_1 f_1^{\lambda_1} \square \lambda_2 f_2^{\lambda_2} \square \cdots \square \lambda_n f_n^{\lambda_n}$$

を一般に $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ の $(f_1, \cdots, f_n)$ に関する Harmonic sum と呼ぶ. ここで

$$f_1^{\lambda_1}(x) = f_1\left(\frac{x}{\lambda_1}\right), \quad \cdots \quad , f_n^{\lambda_n}(x) = f_n\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)$$

とする。

measure space Ω の分割を $A_1, \cdots, A_n$ (measurable) とし, Ω の測度 $\mu(\Omega) = 1$ とし $\mu(A_1), \cdots, \mu(A_n) > 0$ とする。$\lambda_k = \mu(A_k)$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ として, system $\{F(x, t)\}$ の近似 Harmonic sum は $t_k \in A_k$ として

$$\lambda_1 f^{\lambda_1}(\cdot, t_1) \square \lambda_2 f^{\lambda_2}(\cdot, t_2) \square \cdots \square \lambda_n f^{\lambda_n}(\cdot, t_n)$$

を考えることができ, 分割を細かにしたときの極限が存在するときは

$$\int_\Omega \square F(x, t) \, d\mu(t)$$

又は

$$\bigoplus_\Omega F(x, t) \, d\mu(t)$$

で表わすこととする. この x の函数を limiting Harmonic sum w. r. to a measure space (Ω, μ) (今の場合は $\mu(\Omega) = 1$ だから probability space) という。

以上の準備より Moreau-Rachafeller の定理の積分化定理を示すことにする。

定理 F を $\mathbb{R}$ から $P(\Omega)$ への convex operator とし，2つの異なる $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ に対して $F(x_1), F(x_2) \in L^1(\Omega)$ とする。このとき，$F(x)$ の平ts convex function $f(x) = \int_\Omega F(x, t)\, d\mu(t)$ に対し，その conjugate function $f^*(y)$ は高々二点の y をのぞき

$$f^*(y) = \bigoplus_\Omega F^*(y, t)\, d\mu(t)$$

が成立する。

この定理は convex function の system の積分によって定義される convex function の conjugate function を system の conjugate function の組の Harmonic sum の極限で本質的に与えられることを示したものである。

証明は基本 lemma から直ちに得られる．基本 lemma の証明はそれ程 trivial ではない．

References

(1) A.D.Ioffe and V.M.Tihomirov: Theory of Extremal Problems, North-Holland Pub. Company, (1978)

(2) S.Koshi and N.Komuro: A generalization of the Fenchel-Moreau theorem, Proc. Japan Acad. 59(1983) 178-181

(3) R.T.Rockafellar: Network flows and monotropic optimization John Wiley (1984)

(4) J.V.Tiel: Convex analysis, John Wiley (1984)

(5) J.Zowe: A duality theorem for a convex programming problem in order complete vector lattices, J.Math.Anal.Appl., 50 (1975) 273-287

(6) S.Koshi, H.C.Lai and N.Komura: Convex programming on spaces of measurable functions (in preparation, will be published in Hokkaido Mathematical Journal)