数理解析研究所講究録
第 546 巻 1985 年 93-109

Hilbert modular form の trace formula 及び L-関数の特殊値

東工大・理学部　高瀬幸一 (Koichi Takase)

1.　本稿では，Zagier [8] の方法により，次の2項を同時に考える；1) Hilbert cusp form の空間に作用する Hecke operator $T(\mathfrak{n})$ の trace の explicit formula，2) Hilbert cusp form に付随する"2番目の" L-関数 $L_2(s, f, \bar{\chi}_\omega)$ の特殊値。主結果は，No.7 に示す。No.9 では，例として，実2次体の場合を考える。

2.　g 次総実代数体 F を取り，その狭義類数は 1 であると仮定する。F の conjugate mapping $x \mapsto x^{(j)}$ $(j = 1 \cdots g)$ に対応する real prime を ∞_j $(j = 1 \cdots g)$ とする。F の idele class group $F_A^\times / F^\times$ の unitary character ω を取り，

$$\omega(x) = \prod_{\mathfrak{p}} |x_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p}^{s(\mathfrak{p})} \times \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \left(x_\mathfrak{p} / |x_\mathfrak{p}| \right)^{n(\mathfrak{p})} \times \prod_{\mathfrak{p} \nmid \infty} \lambda_\mathfrak{p}(\tilde{x}_\mathfrak{p}) \qquad (x = (x_\mathfrak{p}) \in F_A^\times)$$

とする ($s(\mathfrak{p}) \in \sqrt{-1}\mathbb{R}$，$n(\mathfrak{p}) = 0$ or 1，$|\cdot|_\mathfrak{p}$ = normalized $\mathfrak{p}$-adic absolute value，$\lambda_\mathfrak{p}$: $\mathfrak{p}$-adic unit group の character，$\tilde{x}_\mathfrak{p} = x_\mathfrak{p} \cdot \pi_\mathfrak{p}^{-\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p})}$)。
ω の conductor を $\mathfrak{f}(\omega)$ とし，ω に対応する F の ideal character を χ_ω とする。$\mathfrak{f}(\omega)$ で割れる F の整 ideal M に対して，

$$\Gamma_0(M) = \left\{ \gamma \in GL(2, \mathcal{O}_F) \mid \gamma \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} (\mathrm{mod}\, M),\ \det\gamma \gg 0 \right\}$$

とおく。$k = (k_1 \cdots k_g) \in \mathbb{Z}^g$ s.t. $k_j \equiv n(\infty_j)$ (mod 2)，$k_j > 0$ に対して，

$H^g = \{ z = (z^{(1)}, \cdots, z^{(g)}) \in \mathbb{C}^g \mid \mathrm{Im}\, z^{(j)} > 0 \}$ 上の正則関数 f で，条件

1) $^\forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(M)$ に対して，

$$f(\gamma(z)) = \bar{\lambda}_M(d) \cdot (\det \gamma)^{-(k+s(\infty))/2} \cdot J(\gamma, z)^k \cdot f(z)。$$

ここで

$$\lambda_M(d) = \prod_{\mathfrak{p} \mid M} \lambda_{\mathfrak{p}}(d) \quad , \quad (\det \gamma)^{-(k+s(\infty))/2} = \prod_{j=1}^{g} (\det \gamma^{(j)})^{-(k_j + s(\infty_j))/2}$$

$$J(\gamma, z)^k = \prod_{j=1}^{g} (c^{(j)} z^{(j)} + d^{(j)})^{k_j}。$$

2) $|f(z)| \cdot (\mathrm{Im}\, z)^{k/2}$ は，H^g 上有界。

ここで

$$(\mathrm{Im}\, z)^{k/2} = \prod_{j=1}^{g} (\mathrm{Im}\, z^{(j)})^{k_j/2}。$$

を満すものからなる，有限次元 $\mathbb{C}$-vector space を $S_k(M, w)$ と書く。

$f, g \in S_k(M, w)$ の Petersson 内積を，

$$(f, g) = \int_{\Gamma_0(M) \backslash H^g} f(z) \cdot \overline{g(z)} \cdot (\mathrm{Im}\, z)^k \cdot d\mu(z) \qquad \left(d\mu(z) = \prod_{j=1}^{g} y^{(j)-2} dx^{(j)} dy^{(j)} \right)$$

により定義する。

F の prime ideal $\mathfrak{p}$ に対して，Hecke operator $T(\mathfrak{p}^e)$ $(e \geq 0)$ を，

$$(T(\mathfrak{p}^e) \cdot f)(z)$$
$$= (p^e)^{-(k+s(\infty))/2} \cdot \sum_{1 \leq i \leq e}{}' \sum_{t \in O_F/\mathfrak{p}^i} (p^{e-i})^k \cdot \lambda_M(p^{e-i}) \cdot f\left(\begin{pmatrix} p^{e-i} & t \\ 0 & p^i \end{pmatrix} (z) \right)$$

により定義する。ここで $p \in O_F$ は，$\mathfrak{p}$ の総正生成元，$\sum'_{1 \leq i \leq e}$ は，$(\mathfrak{p}^{e-i}, M) = 1$ なる $1 \leq i \leq e$ 上の和とする。

F の整 ideal $\mathfrak{a}$ に対して，$T(\mathfrak{a}) = \prod_{\mathfrak{p}^e \| \mathfrak{a}} T(\mathfrak{p}^e) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S_k(M, w))$ とおく。

$f \in S_k(M, w)$ の Fourier 展開を，

$$f(z) = \sum_{0 \ll t \in \mathfrak{D}(F/\mathbb{Q})^{-1}} a(t) \cdot e(T_{F/\mathbb{Q}}(t \cdot z))$$

$\left(\mathfrak{D}(F/\mathbb{Q}) : F/\mathbb{Q} \text{ の different}, \quad e(x) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\,x), \quad T_{F/\mathbb{Q}}(t \cdot z) = \sum_{j=1}^{g} t^{(j)} z^{(j)} \right)$

とすると，$0 \ll t \in \mathfrak{D}(F/\mathbb{Q})^{-1}$ に対して，

$$C(f,\ t \cdot \mathfrak{D}(F/\mathbb{Q})) = a(t) \cdot t^{-(k+s(\infty))/2}$$

は，f と $t \cdot \mathfrak{D}(F/\mathbb{Q})$ のみによる。更に，F の整 ideal $\mathfrak{n}$ に対して，

$$C^*(f,\mathfrak{n}) = C(f,\mathfrak{n}) \cdot N(\mathfrak{n}) \qquad (N(\mathfrak{n}) = \text{absolute norm of } \mathfrak{n})$$

とおいて，f に付随する 2 番目の L-関数を

$$L_2(s, f, \bar{\chi}_w) = \zeta_F(2s)_M \cdot \sum_{(\mathfrak{n},M)=1} \bar{\chi}_w(\mathfrak{n}) \cdot C^*(f,\mathfrak{n}^2) \cdot N(\mathfrak{n})^{-(s+1)}$$

と定義する。($\zeta_F(s)_M = \prod_{\mathfrak{p} \nmid M} (1 - N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$)。 $L_2(s, f, \bar{\chi}_w)$ は，$\mathrm{Re}\, s > 1$ で絶対収束する。

$f \in S_k(M, w)$ は，条件

1) f は全ての Hecke operator $T(\mathfrak{n})$ の eigen vector

2) $C(f, 1) = 1$

を満すとき，normalized eigen form と呼ばれる。このとき

$$T(\mathfrak{n}) \cdot f = C^*(f, \mathfrak{n}) \cdot f \quad \text{for } {}^\forall \mathfrak{n}$$

となり，又

$$L_2(s, f, \bar{\chi}_w) = \zeta_F(2s)_M \cdot \zeta_F(s)_M^{-1} \cdot \sum_{(\mathfrak{n},M)=1} \bar{\chi}_w(\mathfrak{n}) \cdot C^*(f, \mathfrak{n})^2 \cdot N(\mathfrak{n})^{-(s+1)}$$

$$= \prod_{\mathfrak{p} \nmid M} H_{\mathfrak{p}}(\bar{\chi}_w(\mathfrak{p}) \cdot N(\mathfrak{p})^{-(s+1)})^{-1}$$

となる。ここで

$$H_{\mathfrak{p}}(T) = (1-\alpha^2 T)(1-\alpha\beta T)(1-\beta^2 T), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ s.t. } \begin{cases} \alpha + \beta = C^*(f, \mathfrak{p}) \\ \alpha\beta = \chi_w(\mathfrak{p}) \cdot N(\mathfrak{p}) \end{cases}$$

3. 以下では，$M = \mathfrak{f}(w)$，$k_j > 2$ $(j = 1 \cdots g)$ と仮定する。このとき，$S_k(M, w)$ は new form の空間と一致し，normalized eigen form からなる $\mathbb{C}$-base $\{f_1 \cdots f_r\}$ をもつ（Miyake [2]）。$\{f_1 \cdots f_r\}$ は Petersson 内積に関して，直交系を成す。

${}^\forall s \in \mathbb{C}$ s.t. $\mathrm{Re}\, s > 1$ に対して，$f \mapsto L_2(s, f, \bar{\chi}_w)$ は，$S_k(M, w)$ の $\mathbb{C}$-linear form だから，$\Phi_s \in S_k(M, w)$ が一意的に定まって，

$$(f, \Phi_{\bar{s}}) = L_2(s, f, \bar{\chi}_w) \quad \text{for } {}^\forall f \in S_k(M, w)$$

となる。$\{f_1 \cdots f_r\}$ が直交系を成すことから，

$$\Phi_s = \sum_{i=1}^{r} L_2(s, f_i, \bar{\chi}_w) \cdot (f_i, f_i)^{-1} \cdot f_i$$

となる。Fourier 係数を比較して，

$$C^*(\Phi_s, \mathfrak{n}) = \sum_{i=1}^{r} L_2(s, f_i, \bar{\chi}_w) \cdot (f_i, f_i)^{-1} \cdot C^*(f_i, \mathfrak{n}) \qquad (1)$$

となる。

4. $\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(M) \right\}$ として，$z \in H^g$，$s \in \mathbb{C}$ に対して，

$$E_M(z, s) = \zeta_F(2s)_M \times \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(M)} N_{F/\mathbb{Q}}(\mathrm{Im}\, \gamma(z))^s$$

とおくと，右辺は $\mathrm{Re}\, s > 1$ で絶対収束する。$E_M(z, s)$ は，s に関して $\mathbb{C}$ 上に有理型に解析接続され，$s \neq 1$ で正則，$s = 1$ は simple pole で residue は，

$$\operatorname*{Res}_{s=1} E_M(z, s) = \frac{1}{4} \cdot (2\pi)^g \cdot \frac{R(F)}{D(F)} \cdot N(M)^{-1} \cdot \prod_{\mathfrak{p} | M} (1 - N(\mathfrak{p})^{-1})$$

となる（$R(F)$：regulator of F，$D(F)$：F の絶対判別式）。

$f\in S_k(M,w)$ は normalized eigen form であるとする。このとき、F の prime ideal $\mathfrak{g}$ に対して、

$$|c^*(f,\mathfrak{g}^e)|^2=\begin{cases}N(\mathfrak{g}^e) & \text{if } \mathfrak{g}\mid M\\ \bar{\chi}_w(\mathfrak{g}^e)\cdot c^*(f,\mathfrak{g}^e)^2 & \text{if } \mathfrak{g}\nmid M\end{cases}$$

となることに注意すると、$\mathrm{Re}\,s>1$ のとき、

$$\int_{\Gamma_0(M)\backslash H^g}|f(z)|^2\cdot(\mathrm{Im}\,z)^k\cdot E_M(z,s)\,d\mu(z) \tag{2}$$
$$=\Big(\prod_{j=1}^{g}\Gamma(s+k_j-1)\cdot(4\pi)^{-(s+k_j-1)}\Big)\cdot\zeta_F(s)\cdot D(F)^{s-\frac{1}{2}}\cdot L_2(s,f,\bar{\chi}_w)$$

となる。よって、$L_2(s,f,\bar{\chi}_w)$ は $s\in\mathbb{C}$ 上に有理型に解析接続され (2) の両辺の $s=1$ での residue を比較して、

$$L_2(1,f,\bar{\chi}_w)/(f,f) \tag{3}$$
$$=\frac{\pi^g}{2}\cdot\Big(\prod_{j=1}^{g}(4\pi)^{k_j}\cdot\Gamma(k_j)^{-1}\Big)\cdot D(F)^{-1}\cdot N(M)^{-1}\cdot\prod_{\mathfrak{g}\mid M}(1-N(\mathfrak{g})^{-1})$$

となる。即ち、$L_2(1,f,\bar{\chi}_w)/(f,f)$ は、f によらない定数となる。

よって、(1) で $s=1$ とすれば

$$\mathrm{trace}\,T(\mathfrak{n})=\sum_{i=1}^{r}c^*(f_i,\mathfrak{n}) \tag{4}$$
$$=2\cdot\pi^{-g}\cdot\Big(\prod_{j=1}^{g}(4\pi)^{-k_j}\cdot\Gamma(k_j)\Big)\cdot D(F)\cdot N(M)\cdot\prod_{\mathfrak{g}\mid M}(1-N(\mathfrak{g})^{-1})^{-1}\times c^*(\Phi_1,\mathfrak{n})$$

となる。

s, $z,z'\in H^g$ に対して、

$$K_1(z,z')=\sum_{\gamma\in Z\backslash\Gamma_0(M)}\lambda_M(\gamma)\cdot(\det\gamma)^{(k+s(\infty))/2}\cdot(z'+\gamma(z))^{-k}\cdot J(\gamma,z)^{-k}$$

とおく。ここで

$$Z=\left\{\begin{pmatrix}\varepsilon&0\\0&\varepsilon\end{pmatrix}\in\Gamma_0(M)\right\}:\text{center of }\Gamma_0(M)$$

$$\lambda_M(\gamma) = \prod_{\mathfrak{g}|M} \lambda_{\mathfrak{g}}(d) \quad \text{for } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(M)$$

$$(z' + \gamma(z))^{-k} = \prod_{j=1}^{g} (z'^{(j)} + \gamma(z)^{(j)})^{-k_j} \quad 。$$

$K_1(z, z')$ は絶対収束して，第一変数に関して，$K_1(*, z') \in S_k(M, w)$ である。更に，$^\forall f \in S_k(M, w)$ に対して，

$$(f, K_1(*, -\bar{z})) = C_k \cdot f(z) \qquad \left(C_k = \pi^g \cdot \left(\prod_{j=1}^{g} (\sqrt{-1})^{k_j} \cdot 2^{2-k_j} \cdot (k_j - 1)^{-1} \right) \right)$$

となる（Shimizu [3], Th.9）。

F の整 ideal $\mathfrak{n}$ に対して，Petersson 内積に関する $T(\mathfrak{n})$ の conjugate を $T^*(\mathfrak{n})$ として（i.e. $(T(\mathfrak{n}) \cdot f, g) = (f, T^*(\mathfrak{n}) \cdot g)$），

$$K_{\mathfrak{n}}(*, z') = T^*(\mathfrak{n}) \cdot K_1(*, z') \in S_k(M, w)$$

とおくと（$T^*(\mathfrak{n})$ は，$K_1(z, z')$ の第一変数に対して作用する。），$^\forall f \in S_k(M, w)$ に対して，

$$(f, K_{\mathfrak{n}}(*, -\bar{z})) = C_k \cdot (T(\mathfrak{n}) \cdot f)(z)$$

となる。

特に $(\mathfrak{n}, M) = 1$ のときは $T^*(\mathfrak{n}) = \bar{\chi}_w(\mathfrak{n}) \cdot T(\mathfrak{n})$ だから，

$$K_{\mathfrak{n}}(z, z') = \sum_{\substack{\gamma \in Z \backslash \Delta_0(M) \\ \text{s.t. } (\det \gamma) = \mathfrak{n}}} \lambda_M(\gamma) \cdot (\det \gamma)^{(k + s(\infty))/2} \cdot (z' + \gamma(z))^{-k} \cdot J(\gamma, z)^{-k}$$

となる。ここで

$$\Delta_0(M) = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, \mathcal{O}_F) \;\middle|\; \det \gamma \gg 0,\ c \equiv 0 \pmod{M},\ (a, M) = 1 \right\}。$$

更に，$S_k(M, w)$ の normalized eigen base $\{f_1 \cdots f_r\}$ に対して，

$$K_{\mathfrak{n}}(z, z') = w_\infty(-1) \cdot C_k \cdot \bar{\chi}_w(\mathfrak{n}) \cdot \sum_{i=1}^{r} C^*(f_i, \mathfrak{n}) \cdot (f_i, f_i)^{-1} \cdot f_i(z) \cdot \overline{f_i(-\bar{z}')} \qquad (5)$$

となる。

式 (1), (2), (5) から次を得る;

<u>Prop. 1</u>　$(\mathfrak{n}, M)=1$ なる F の整 ideal $\mathfrak{n}$ に対して,

$$C^*(\Phi_s, \mathfrak{n})$$
$$= \left(\prod_{j=1}^{g} (2\sqrt{-1})^{k_j} \cdot (k_j-1) \cdot (4\pi)^{s+k_j-2} \cdot \Gamma(s+k_j-1)^{-1}\right) \cdot D(F)^{\frac{1}{2}-s} \cdot \zeta_F(s) \cdot \overline{\chi}_w(\mathfrak{n})$$
$$\times \int_{\Gamma_0(M)\backslash H^g} K_{\mathfrak{n}}(z, -\bar{z}) \cdot (\mathrm{Im}\, z)^k \cdot E_M(z, s)\, d\mu(z)_{\circ}$$

6.　<u>Prop. 1</u> に現われる積分を計算して, $C^*(\Phi_s, \mathfrak{n})$ の公式を得るのであるが, その際生ずる特殊な character sum について述べる。

n, m は F の整数で, m は総正とする。 M で割れる F の整 ideal $\mathfrak{k}$ に対して,

$$C_{n,m}(w, \mathfrak{k}) = m^{(k-s(\infty))/2} \cdot \sum_{t \in O_F/\mathfrak{k} \text{ s.t. } t^2+mt+n \equiv 0 \pmod{\mathfrak{k}}} \overline{\lambda}_M(t)$$

$$\left(\lambda_M(t) = \begin{cases} \prod_{\mathfrak{p}|M} \lambda_{\mathfrak{p}}(t) & : \text{if } (t, M)=1 \\ 0 & : \text{if } (t, M) \neq 1 \end{cases} \right)$$

とおく。更に $s \in \mathbb{C}$ に対して,

$$L_M(n, m, w; s) = \zeta_F(s)^{-1} \cdot \zeta_F(2s)_M \cdot \sum_{M|\mathfrak{k}} C_{n,m}(w, \mathfrak{k}) \cdot N(\mathfrak{k})^{-s}$$

とおく ($\sum_{M|\mathfrak{k}}$ は, M で割れる F の整 ideal $\mathfrak{k}$ 上の和)。
F の 2 次拡大 $K = F(\sqrt{n^2-4m})$ に対して, K/F の相対判別式の生成元 $D \in O_F$ を選んで, $n^2-4m = D \cdot f^2$ $(f \in O_F)$ とし, K/F に対応する F の ideal character を $\chi_D = \left(\frac{K/F}{*}\right)$ とすると, 次を得る;

<u>Prop. 2</u> $L_M(n, m, w; s)$

$$=\begin{cases} \left(-\frac{n}{2}\right)^k \cdot \chi_w\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \zeta_F(2s-1) \cdot N(M)^{1-2s} \cdot \prod_{\mathfrak{g}|M} (1+N(\mathfrak{g})^{s-1})(1-N(\mathfrak{g})^{-s}) & \text{if } f=0 \\ L_F(s, \chi_D) \times \sum_{\mathfrak{c}|f_M} N(f_M/\mathfrak{c})^{1-2s} \cdot \prod_{\mathfrak{g}|\mathfrak{c}} (1-\chi_D(\mathfrak{g}) \cdot N(\mathfrak{g})^{-s}) & \text{if } f \neq 0 \\ \quad \times \sum_{\mathfrak{c}|M(f)/M} C_{n,m}(w, M(f)/\mathfrak{c}) \cdot N(M(f)/\mathfrak{c})^{-s} \cdot \prod_{\mathfrak{g}|\mathfrak{c}} (1-\chi_D(\mathfrak{g}) \cdot N(\mathfrak{g})^{-s}) & \\ \quad \times \prod_{\mathfrak{g}|M} (1-N(\mathfrak{g})^{-s}) & \end{cases}$$

ここで

$$L_F(s, \chi_D) = \prod_{\mathfrak{g}\nmid D} (1-\chi_D(\mathfrak{g}) \cdot N(\mathfrak{g})^{-s})^{-1}$$

$$f_M = \prod_{\mathfrak{g}\nmid M} \mathfrak{g}^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{g}}(f)}$$

$$M(f) = \prod_{\mathfrak{g}|M} \mathfrak{g}^{c(\mathfrak{g})} \quad \text{for } c(\mathfrak{g}) = \mathrm{Max}\{2 \cdot \mathrm{ord}_{\mathfrak{g}}(f)+1,\ \mathrm{ord}_{\mathfrak{g}}(M \cdot f)\}$$

又, $F(\sqrt{n^2-4m}) = F$ のときは, $\chi_D = 1$ とする.

<u>Prop. 2</u> により, Shintani [4] 又は Siegel [5], [6] の公式を用いて, 適当な $s \in \mathbb{Z}$ における $L_M(n, m, w; s)$ の値を具体的に求めることが出来る。

7. <u>Prop. 1</u> に現われる積分を計算して, 次を得る;

<u>Th. 1</u> $M = f(w)$, $k_j > 2$ $(j = 1 \cdots g)$ と仮定する。$(\mathfrak{n}, M) = 1$ なる F の整 ideal $\mathfrak{n}$ に対して, $\mathfrak{n}$ の総正生成元 $m \in O_F$ を取る。奇整数 κ を取って, $1 < \kappa < k_0 - 1$ $(k_0 = \mathrm{Min}\{k_1 \cdots k_g\})$ とする。このとき,

$$
\begin{aligned}
&C^*(\Phi_k, \mathfrak{n}) \\
&= \Big(\prod_{j=1}^{g} (4\pi)^{k_j-1} \cdot \Gamma(k_j-1)^{-1}\Big) \cdot D(F)^{\frac{1}{2}} \cdot \zeta_F(2\kappa)_M \cdot N(\sqrt{\mathfrak{n}})^{1-\kappa} \cdot \chi_w(\sqrt{\mathfrak{n}}) \\
&\quad + (-1)^{\frac{1}{2}(\kappa+1)\cdot g} \cdot \frac{\pi^g}{2} \cdot \Big(\prod_{j=1}^{g} 2^{k_j} \cdot (2\pi)^{\kappa+k_j-2} \cdot \frac{\Gamma(\kappa)\cdot\Gamma(k_j-\kappa)}{\Gamma(\kappa+k_j-1)\cdot\Gamma(k_j-1)}\Big) \cdot D(F)^{\frac{1}{2}-\kappa} \cdot m^{1-k} \\
&\quad \times \sum_{n^2 \ll 4m} N_{F/\mathbb{Q}}(4m-n^2)^{\kappa-\frac{1}{2}} \cdot C^{\kappa}_{k-\kappa-1}(n, m) \cdot L_M(n, m, w; \kappa)
\end{aligned}
$$

となる。ここで

$$\zeta_F(s)_M = \prod_{\mathfrak{p} \nmid M} (1 - N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$$

$$N(\sqrt{\mathfrak{n}})^{1-\kappa} \cdot \chi_w(\sqrt{\mathfrak{n}}) = \begin{cases} N(\mathfrak{z})^{1-\kappa} \cdot \chi_w(\mathfrak{z}) & \text{if } \mathfrak{n} = \mathfrak{z}^2 \quad (\mathfrak{z} : \text{ideal of } F) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$m^{1-k} = \prod_{j=1}^{g} m^{1-k_j}$, $\sum_{n^2 \ll 4m}$: $n^2-4m \ll 0$ なる $n \in O_F$ 上の和。

$C^{\kappa}_{k-\kappa-1}(n, m) = \prod_{j=1}^{g} C^{\kappa}_{k_j-\kappa-1}(n^{(j)}, m^{(j)})$ $\quad \left(\begin{aligned} &(1+\alpha X + \beta X^2)^{-\kappa} \\ &= \sum_{e \geq 0} C^{\kappa}_e(\alpha, \beta) \cdot X^e \end{aligned} \right)$

とおく。更に、κ は奇整数だから、Prop.1 により、上の式に現われる $L_M(n, m, w; \kappa)$ の値は具体的に計算できることに注意する。

Th.2 $M = f(w)$, $k_j > 2$ $(j = 1 \cdots g)$ と仮定する。$(\mathfrak{n}, M) = 1$ なる F の整 ideal $\mathfrak{n}$ に対して、$\mathfrak{n}$ の総正生成元 $m \in O_F$ を取る。このとき

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{trace}\ T(\mathfrak{n}) \\
&= \prod_{j=1}^{g} (k_j-1) \cdot D(F)^2 \cdot \frac{2 \cdot \zeta_F(2)}{(2\pi)^{2g} \cdot \sqrt{D(F)}} \cdot N(M) \cdot \prod_{\mathfrak{p} \mid M} (1 + N(\mathfrak{p})^{-1}) \cdot \chi_w(\sqrt{\mathfrak{n}})
\end{aligned}
$$

$$+(-1)^g \cdot \sum_{n^2 \ll 4m} m^{1-k} \cdot C^1_{k-2}(n, m) \cdot \frac{h(K)}{w(K)} \cdot N\left(\frac{f \cdot M}{f_M \cdot M(f)}\right)$$
$$\times \sum_{\mathfrak{c} \mid f_M} N(\mathfrak{c}) \cdot \prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{c}} (1 - \chi_D(\mathfrak{p}) \cdot N(\mathfrak{p})^{-1})$$
$$\times \sum_{\mathfrak{c} \mid M(f)/M} C_{n,m}(w, M(f)/\mathfrak{c}) \cdot N(\mathfrak{c}) \cdot \prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{c}} (1 - \chi_D(\mathfrak{p}) \cdot N(\mathfrak{p})^{-1})$$
$$- \Delta_F(k, m, w)$$

となる。ここで

$$\chi_w(\sqrt{\mathfrak{a}}) = \begin{cases} \chi_w(\mathfrak{z}) & \text{if } \mathfrak{a} = \mathfrak{z}^2 \ (\mathfrak{z} : \text{ideal of } F) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\sum_{n^2 \ll 4m}$: $n^2 - 4m \ll 0$ なる $n \in O_F$ 上の和。

又, $K = F(\sqrt{n^2-4m})$ として, K/F の相対判別式の生成元 $D \in O_F$ を選んで $n^2 - 4m = Df^2$ $(f \in O_F)$ としたとき,

$h(K) = K$ の類数, $w(K) = K$ が含む 1 の巾根の個数

$$f_M = \prod_{\mathfrak{p} \nmid M} \mathfrak{p}^{\operatorname{ord}_\mathfrak{p}(f)}$$

$$M(f) = \prod_{\mathfrak{p} \mid M} \mathfrak{p}^{c(\mathfrak{p})} \quad \text{for } c(\mathfrak{p}) = \operatorname{Max}\{2 \cdot \operatorname{ord}_\mathfrak{p}(f) + 1, \operatorname{ord}_\mathfrak{p}(M \cdot f)\}$$

$\chi_D = \left(\frac{K/F}{*}\right)$: K/F に対応する F の ideal character。

$F \neq Q$ のときは, $\Delta_F(k, m, w) = 0$。 $F = Q$ のときは,

$$\Delta_F(k, m, w) = \sum_{d \mid m} \operatorname{Max}\{d, m/d\}^{1-k} \cdot \Delta(d + m/d, m, w)$$

$$\Delta(t, m, w) = \begin{cases} \dfrac{M}{M(e)} \cdot \displaystyle\sum_{d \mid M(e)/M} C_{-t,m}(w, M(e)/d) \cdot d \cdot \prod_{p \mid d} (1 - p^{-1}) & \text{if } t^2 - 4m = e^2 \neq 0 \\ \left(\frac{t}{2}\right)^k \cdot \chi_w\left(\frac{t}{2}\right) \cdot 2^{r-1} & \text{if } t^2 - 4m = 0 \end{cases}$$

$$M(e) = \prod_{p \mid M} p^{c(p)} \quad \text{for } c(p) = \operatorname{Max}\{2 \cdot \operatorname{ord}_p(e) + 1, \operatorname{ord}_p(M \cdot e)\}$$

$r = M$ の素因子の個数。

$S_k(M, w)$ の normalized eigen base $\{f_1 \cdots f_r\}$ に対して,

$$\zeta^*(\Phi_k, \Omega) = \sum_{i=1}^{r} L_2(k, f_i, \bar{\chi}_w)\cdot(f_i, f_i)^{-1}\cdot \zeta^*(f_i, \Omega)$$

である。よって, Th.2 より $\zeta^*(f_i, \Omega)$ の値を知り, Th.1 より $\zeta^*(\Phi_k, \Omega)$ の値を知れば, $L_2(k, f_i, \bar{\chi}_w)/(f_i, f_i)$ の値を具体的に計算することができる。よって, 次を得る;

Cor. normalized eigen form $f \in S_k(M, w)$ $(M = \mathfrak{f}(w))$ と, $1 \leqq k < k_0 - 1$ なる奇整数 k を取る ($k_0 = \mathrm{Min}\{k_1 \cdots k_g\}$)。このとき, w が finite order (i.e. $s(\infty_j) = 0$ $(j = 1 \cdots g)$) ならば

$$L_2(k, f, \bar{\chi}_w)\Big/\left(\prod_{j=1}^{g} \pi^{2k-k_j-1}\right)\cdot(f, f)$$

は, $\mathbb{Q}$ 上代数的数である。

$F = \mathbb{Q}$, $s(\infty) = 0$ の場合は, Sturm [7] において扱われている。Cor. と, [7] の結果との関係は, 次の通り; λ_M は modulo M の primitive Dirichlet character とみなせるから, $D(s, f, \lambda_M)$ を [7] で定義された関数とすると, $L_2(s, f, \bar{\chi}_w) = D(s+k-1, f, \lambda_M)$ となる。$L_2(s, f, \bar{\chi}_w)$ は, $s \mapsto 1-s$ で関数等式をもつ様に正規化されている。

8. Th.2 を $F = \mathbb{Q}$, $\Omega = 1$ の場合に適用して, よく知られた $\dim_{\mathbb{C}} S_k(M, w)$ の公式を得る;

Cor. $M = f(w)$, $k > 2$ のとき,

$$\dim_{\mathbb{C}} S_k(M, w) = \frac{k-1}{12} \cdot M \cdot \prod_{p|M} (1+p^{-1})$$

$$+ \begin{Bmatrix} 1 & : k \equiv 0 \ (4) \\ 0 & : k \equiv 1 \ (2) \\ -1 & : k \equiv 2 \ (4) \end{Bmatrix} \times \frac{1}{4} \times \sum_{t \in \mathbb{Z}/(M) \,:\, t^2+1 \equiv 0 \ (M)} \lambda_M(t)$$

$$+ \begin{Bmatrix} 1 & : k \equiv 0 \ (3) \\ 0 & : k \equiv 1 \ (3) \\ -1 & : k \equiv 2 \ (3) \end{Bmatrix} \times \frac{1}{3} \times \sum_{t \in \mathbb{Z}/(M) \,:\, t^2+t+1 \equiv 0 \ (M)} \lambda_M(t)$$

$$- 2^{r-1}$$

ここで, r = M の素因子のコ数。

9. 以下 $g = (F : \mathbb{Q}) = 2$ の場合に, Th. 2 の例として, $\dim_{\mathbb{C}} S_k(M, w)$ の公式を示す。 F の狭義類数は 1 と仮定しているから,

$F = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ $p = 2$ 又は $p \equiv 1 \pmod 4$ なる素数

となる。ここで

$$\{ n \in O_F \mid n^2 \ll 4 \} = \begin{cases} \{0, \pm 1, \pm\sqrt{2}\} & \text{if } p = 2 \\ \{0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \pm\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\} & \text{if } p = 5 \\ \{0, \pm 1\} & \text{if } p > 5 \end{cases}$$

だから, これら三つの場合を分けて考える。

Case 1 $F = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ $(p > 5)$。

n	n^2-4	D	f	$w(F(\sqrt{n^2-4}))$
0	-4	-4	1	4
± 1	-3	-3	1	6

$$C'_{k-2}(0,1)=\begin{cases}1 & : k\equiv(0,0),(2,2) \pmod 4\\ 0 & : k\equiv(1,*),(*,1) \pmod 2\\ -1 & : k\equiv(0,2),(2,0) \pmod 4\end{cases}$$

$$C'_{k-2}(1,1)=\begin{cases}1 & : k\equiv(0,0),(2,2) \pmod 3\\ 0 & : k\equiv(1,*),(*,1) \pmod 3\\ -1 & : k\equiv(0,2),(2,0) \pmod 3\end{cases}$$

よって, $M=f(w)$, $k_j>2$ $(j=1,2)$ のとき,

$$\begin{aligned}&\dim_{\mathbb{C}} S_k(M,w)\\ &=(k_1-1)(k_2-1)\cdot D(F)^2\cdot\frac{2\cdot\zeta_F(2)}{(2\pi)^4\cdot\sqrt{D(F)}}\cdot N(M)\cdot\prod_{\mathfrak{p}\mid M}(1+N(\mathfrak{p})^{-1})\\ &\quad + C'_{k-2}(0,1)\times\frac{1}{4}\times h(F(\sqrt{-1}))\times\sum_{t\in O_{F/M}\,:\,t^2+1\equiv 0\,(M)}\bar{\lambda}_M(t)\\ &\quad + C'_{k-2}(1,1)\times\frac{1}{3}\times h(F(\sqrt{-3}))\times\sum_{t\in O_{F/M}\,:\,t^2+t+1\equiv 0\,(M)}\bar{\lambda}_M(t)\ 。\end{aligned}$$

ここで, Kubota [1] の公式から,

$$h(F(\sqrt{-1}))=\frac{1}{2}\cdot h(\mathbb{Q}(\sqrt{-p})),\quad h(F(\sqrt{-3}))=\frac{1}{2}\cdot h(\mathbb{Q}(\sqrt{-3p}))$$

である。最初の 10 コの $F=\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ に対しては,

p	$h(F(\sqrt{-1}))$	$h(F(\sqrt{-3}))$	$D(F)^2\cdot\frac{2\cdot\zeta_F(2)}{(2\pi)^4\cdot\sqrt{D(F)}}$
13	1	2	1/12
17	2	1	1/6
29	3	3	1/4
37	1	4	5/12
41	4	1	2/3
53	3	5	7/12

61	3	4	$11/12$
73	2	2	$11/6$
89	6	1	$13/6$
97	2	2	$17/6$

となる。

<u>Case 2</u> $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$。 $\rho = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, $\rho' = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ として,

n	n^2-4	D	f	$h(F(\sqrt{n^2-4}))$	$w(F(\sqrt{n^2-4}))$
0	-4	-4	1	1	4
± 1	-3	-3	1	1	6
$\pm\rho$	$-3+\rho$	$-3+\rho$	1	1	10
$\pm\rho'$	$-2-\rho$	$-2-\rho$	1	1	10

$$D(F)^2 \cdot \frac{2\cdot\zeta_F(2)}{(2\pi)^4\cdot\sqrt{D(F)}} = \frac{1}{60}$$

$$C'_{k-2}(\rho, 1) = \begin{cases} 1 : & k \equiv (0,0)\ (2,2)\ (4,3)\ (3,4) \pmod 5 \\ \rho : & k \equiv (3,0)\ (4,2) \pmod 5 \\ \rho' : & k \equiv (2,4)\ (0,3) \pmod 5 \\ 0 : & k \equiv (1,*), (*,1) \pmod 5 \\ -\rho' : & k \equiv (2,3)\ (0,4) \pmod 5 \\ -\rho : & k \equiv (3,2)\ (4,0) \pmod 5 \\ -1 : & k \equiv (0,2)\ (2,0)\ (3,3), (4,4) \pmod 5 \end{cases}$$

$C'_{k-2}(\rho', 1) = C'_{k-2}(\rho, 1)$ の conjugate。

よって, $M = f(w)$, $k_j > 2$ $(j = 1, 2)$ のとき

$$\dim_{\mathbb{C}} S_k(M,w) = \frac{1}{60}\cdot(k_1-1)(k_2-1)\cdot N(M)\cdot\prod_{\mathfrak{g}|M}(1+N(\mathfrak{g})^{-1})$$
$$+ C^1_{k-2}(0,1)\times\frac{1}{4}\times\sum_{t\in O_F/M \,:\, t^2+1\equiv 0 \pmod M}\bar{\lambda}_M(t)$$
$$+ C^1_{k-2}(1,1)\times\frac{1}{3}\times\sum_{t\in O_F/M \,:\, t^2+t+1\equiv 0 \pmod M}\bar{\lambda}_M(t)$$
$$+ C^1_{k-2}(\rho,1)\times\frac{1}{5}\times\sum_{t\in O_F/M \,:\, t^2+\rho t+1\equiv 0 \pmod M}\bar{\lambda}_M(t)$$
$$+ C^1_{k-2}(\rho',1)\times\frac{1}{5}\times\sum_{t\in O_F/M \,:\, t^2+\rho' t+1\equiv 0 \pmod M}\bar{\lambda}_M(t)$$

となる（ $C^1_{k-2}(0,1)$, $C^1_{k-2}(1,1)$ は Case 1 と同じ）。

Case 3　$F=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$。

n	n^2-4	D	f	$h(F(\sqrt{n^2-4}))$	$w(F(\sqrt{n^2-4}))$
0	-4	-2	$\sqrt{2}$	1	8
± 1	-3	-3	1	1	6
$\pm\sqrt{2}$	-2	-2	1	1	8

$$D(F)^2\cdot\frac{2\cdot\zeta_F(2)}{(2\pi)^4\cdot\sqrt{D(F)}} = \frac{1}{24}$$

$$C^1_{k-2}(\sqrt{2},1) = \begin{cases} 1 : & k\equiv(0,0)\,(2,2)\,(4,4)\,(6,6)\,(0,6)\,(6,0)\,(2,4)\,(4,2) \pmod 8\\ 2 : & k\equiv(3,7)(7,3) \pmod 8\\ \sqrt{2} : & k\equiv(0,7)\,(2,3)\,(3,0)\,(3,6)\,(4,3)\,(6,7)(7,2)(7,4) \pmod 8\\ 0 : & k\equiv(1,*)\,(*,1)\,(5,*)\,(*,5) \pmod 8\\ -\sqrt{2} : & k\equiv(0,3)\,(2,7)\,(3,2)(3,4)(4,7)(6,3)(7,0)(7,6) \pmod 8\\ -2 : & k\equiv(3,3)\,(7,7) \pmod 8\\ -1 : & k\equiv(0,2)\,(2,0)\,(0,4)(4,0)(2,6)(6,2)(4,6)(6,4) \pmod 8\end{cases}$$

よって，$M=f(w)$, $k_j>2$ $(j=1,2)$ のとき，

$$
\begin{aligned}
&\dim_{\mathbb{C}} S_k(M, w) \\
&= \frac{1}{24}\cdot(k_1-1)(k_2-1)\cdot N(M)\cdot\prod_{\wp\mid M}(1+N(\wp)^{-1}) \\
&\quad + C'_{k-2}(0,1)\times\frac{1}{8}\times\begin{cases} 3\cdot\displaystyle\sum_{t\in O_F/M\,:\,t^2+1\equiv 0 \pmod{M}} \bar{\lambda}_M(t) & : \mathrm{ord}_{\sqrt{2}}(M)=0 \\ \displaystyle\sum_{t\in O_F/(\sqrt{2}M)\,:\,t^2+1\equiv 0 \pmod{\sqrt{2}\cdot M}} \bar{\lambda}_M(t) & : \mathrm{ord}_{\sqrt{2}}(M)=2 \\ 2\cdot\displaystyle\sum_{t\in O_F/M\,:\,t^2+1\equiv 0 \pmod{M}} \bar{\lambda}_M(t) & : \mathrm{ord}_{\sqrt{2}}(M)=3 \\ 0 & : \mathrm{ord}_{\sqrt{2}}(M)>3 \end{cases} \\
&\quad + C'_{k-2}(1,1)\times\frac{1}{3}\times\sum_{t\in O_F/M\,:\,t^2+t+1\equiv 0 \pmod{M}} \bar{\lambda}_M(t) \\
&\quad + C'_{k-2}(\sqrt{2},1)\times\frac{1}{4}\times\sum_{t\in O_F/M\,:\,t^2+\sqrt{2}t+1\equiv 0 \pmod{M}} \bar{\lambda}_M(t)
\end{aligned}
$$

となる（$C'_{k-2}(0,1)$, $C'_{k-2}(1,1)$ は <u>Case 1</u> と同じ）。$M=\mathfrak{f}(w)$ は, w の conductor であるから, $\mathrm{ord}_{\sqrt{2}}(M)=0$ 又は, $\mathrm{ord}_{\sqrt{2}}(M)\geqq 2$ となることに注意する。

References.

[1] Kubota,T.: Uber den bizyclischen biquadratischen Zahlkorper. Nagoya Math.J. 10 (1956) 65-85.

[2] Miyake,T.: On automorphic forms on GL_2 and Hecke operators. Ann.of Math. 94 (1971) 174-189.

[3] Shimizu,H.: On discontinuous groups operating on the product of the upper half planes. Ann.of Math. 77 (1963) 33-71.

[4] Shintani,T.: On evaliation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers. J.Faculty of Science Univ.of Tokyo 23 (1976) 393-417.

[5] Siegel,C.L.: Bernoullische Polinome und quadratische Zahlkorper. Nach.Akad.Wiss. Gottingen, Math.-Phys. K1. (1968) 7-38.

[6] Siegel,C.L.: Berechnung von Zetafunctionen an ganzzahligen Stellen. ibid. (1969) 87-102.

[7] Sturm,J.: Special values of zeta functions, and Eisenstein series of half integral weight. Amer.J.of Math. 102 No.2 (1980) 219-240.

[8] Zagier,D: Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta-functions of quadratic fields. Lecture Note in Math. 627 (1976) 105-169. Springer.