数理解析研究所講究録
第 546 巻 1985 年 138-149

一般化された超幾何関数について

近畿大理工　長岡昇勇（Shōyū Nagaoka）

Introduction. tube 領域上の，一般化された超幾何関数については，G. Shimura [2] において研究がなされている．その結果は，それに続く論文 [3] において，非解析的 Eisenstein 級数の性質を調べるために使われている．大筋を述べると，Eisenstein 級数の Fourier 係数を，ある adele 空間上の積分として表示したとき，その archimedean part に，上に述べた一般化された超幾何関数が現われ，non archimedean part に，ある singular 級数が現われる．このノートの目的は，[2] の結果を，Jordan 環の言葉を使い，記述することにある．

1. まず，Jordan 環について，後で必要となる基本的事項をまとめる（定義，及び，その基本的性質については，[1] 参照）．V を実数体 $\mathbb{R}$ 上の Jordan 環とする．さらに，$\dim_{\mathbb{R}} V = n$ とする．$a, b, c, x \in V$ に対して，次の記号

を使う.

$$\{a, b, c\} = (ab)c + a(bc) - b(ac),$$

$$T_a(x) = ax, \quad (a \square b)x = \{a, b, x\} = (T_{ab} + [T_a, T_b])x.$$

以下, Vは, 形式的に実 (formally real), かつ単純であると仮定する. すると, Vは単位元1をもつ. そこで, 1の原始的巾等元$\{e_1, e_2, \cdots, e_r\}$による分解

$$\sum_{i=1}^{r} e_i = 1, \qquad e_i e_j = \delta_{ij} e_i, \quad (\delta_{ij}: \text{Kronecker のデルタ})$$

を考える. すると, 個数rは一定であり, これをVの階数(rank)と呼ぶ. $\mathrm{rk}\, V = r$. 以下$\{e_1, \cdots, e_r\}$を固定して考える. Vの一次変換T_{e_i}の固有値は, $0, \frac{1}{2}, 1$である. そこで

$$V_{ii} = \{v \in V \mid T_{e_i}(v) = v\},$$

$$V_{ij} = \{v \in V \mid T_{e_i}(v) = T_{e_j}(v) = \tfrac{1}{2}v\}, \quad (i \neq j)$$

なる部分空間を考える. すると, Vが被約的(reduced)であることより, $V_{ii} = \{e_i\}_{\mathbb{R}}$がわかり, さらに, $\dim_{\mathbb{R}} V_{ij} = d$ (一定), となることもわかる.

Vは 直和分解

$$V = \bigoplus_{i \leq j} V_{ij} \qquad (\text{Peirce 分解})$$

をもち，Vの次元 n，階数 r，そして d の間に次の式が成立する．

$$n = r + \frac{d}{2} r(r-1) .$$

V上の内積 $\langle \, , \, \rangle$ を

$$\langle x, y \rangle = \frac{r}{n} \operatorname{tr}(T_{xy}) \quad , \quad x, y \in V$$

で定義する．すると，Vが形式的に実であることより，この内積が正定値となることがわかる．

次に Vの構造群 $G = \operatorname{Str} V$ と，自己同型群 $K = \operatorname{Aut} V$ を次の様に定義する．

$$G = \operatorname{Str} V = \{ g \in GL(V) \mid g(x \square y) g^{-1} = (gx) \square ({}^t g^{-1} y) \ \text{for all } x, y \in V \},$$

$$K = \operatorname{Aut} V = \{ g \in GL(V) \mid g(xy) = g(x) g(y) \ \text{for all } x, y \in V \}.$$

ここで t は内積 $\langle \, , \, \rangle$ に関する adjoint を表わす．

すると，Gは reductive な代数群になることがわかる．

注意．i) Gの定義の条件は

$$g\{x, y, z\} = \{gx, {}^tg^{-1}y, gz\}$$

とも書ける.

ii) K は. V の単位元 1 を固定する元のなす群としても定義される.

G^0, K^0 を, それぞれ, G と K の identity connected component とする. すると, K^0 は G^0 の極大 compact 部分群となる.

V 上の被約 norm を N で表わすことにする. これは. V 上の次数 r の. irreducible, homogeneous な多項式関数で 次の性質で特徴付けられるものである:

$$N(1)=1 \quad , \quad N(gx) = \det(g)^{\frac{r}{n}} N(x) \qquad (g \in G^0, \ x \in V).$$

以下, 自己同型群 K の性質を, いくつか挙げる.

<u>命題 1.1</u>. (1) K の元は 内積を不変にする. すなわち.

$g \in K$ なら, $\langle gx, gy \rangle = \langle x, y \rangle$ for all $x, y \in V$

(2). K^0 の元は. 被約 norm を不変にする. すなわち,

$g \in K^0$ なら, $N(gx) = N(x)$ for all $x \in V$

(3) (対角化の原理) 任意の V の元 x に対して, K^0 の元 g と $\mathbb{R}$ の元 α_i ($i = 1, 2, \cdots, r$) が存在して

$$g x = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i \quad , \qquad \alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots \geqq \alpha_r \ .$$

と表わされる．さらに，上の表現の実数達α_iは，xによって一意に決まる．

上記命題(3)の実数達α_iを，Vのえxの固有値と呼ぶことにする．さらに，後の必要の為に，Vの部分集合$V(p,q,s)$，$(p+q+s=r)$を，Vのえで，p個の正固有値，q個の負固有値s個の零固有値をもつもの全体からなるものとして定義しておく．

2. tube領域上の超幾何関数．　まず，Jordan環V内の錐Ωを，Vの単位え1のG^0-軌道として定義する．すると，Ωは，自己共役なhomogeneous coneとなる．Ωに付随するガンマ関数$\Gamma_\Omega(s)$を，

$$\Gamma_\Omega(s) = \int_\Omega e^{-\langle u, 1\rangle} N(u)^{s-\frac{n}{r}} \, d(u)$$

で定義する．ここで，$d(u)$は，内積$\langle \, , \rangle$に関するEuclidean volume element．すると，右辺の積分は，$Re(s) > \frac{n}{r} - 1$ で収束し，

$$\Gamma_\Omega(s) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(n-r)} \prod_{i=1}^{r} \Gamma\left(s - \frac{d}{2}(i-1)\right)$$

と書ける．ここで $\Gamma(s)$ は通常のガンマ関数．

そこで tube 領域 $\mathbb{H} = V + i\Omega$ を考える．さらに，V 内の lattice (i.e. max. rank をもつ V の discrete 部分群) L に対して，次の無限級数 S_Ω を考える．

$$S_\Omega(z, L; \alpha, \beta) = \sum_{a \in L} N(z+a)^{-\alpha} N(\bar{z}+a)^{-\beta},$$

$$(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \quad z \in \mathbb{H}.$$

すると，S_Ω は $\mathbb{H} \times \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \mid \mathrm{Re}(\alpha+\beta) > \frac{2n}{r} - 1\}$ 上で locally uniformly に収束することがわかる．

ここで，S_Ω の Fourier 展開を簡単に表現するために，次の関数を定義する．

$g \in \Omega$，$h \in V$，$(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ に対して，

$$\xi_\Omega(g, h; \alpha, \beta) = \int_V e^{-2\pi i \langle h, x \rangle} N(x+ig)^{-\alpha} N(x-ig)^{-\beta}\, d(x),$$

$$\eta_\Omega(g, h; \alpha, \beta) = \int_{x \pm h \in \Omega} e^{-\langle g, x \rangle} N(x+h)^{\alpha - \frac{n}{r}} N(x-h)^{\beta - \frac{n}{r}}\, d(x),$$

とおく．すると，ξ_Ω は $\mathrm{Re}(\alpha+\beta) > \frac{2n}{r} - 1$ で収束し，(α, β) に関する正則関数となる．さらに，$\mathrm{Re}(\alpha) > \frac{n}{r} - 1$，$\mathrm{Re}(\beta) > \frac{2n}{r} - 1$ なら η_Ω は収束し，

$$\xi_\Omega(g,h;\alpha,\beta)=i^{r(\beta-\alpha)}(2\pi)^n\Gamma_\Omega(\alpha)^{-1}\Gamma_\Omega(\beta)^{-1}\eta_\Omega(2g,\pi h;\alpha,\beta)$$

が成立する.

すると, 無限級数 S_Ω は

$$\mathrm{Re}(\alpha)>\frac{n}{r}-\frac{1}{2}\quad,\quad \mathrm{Re}(\beta)>\frac{n}{r}-\frac{1}{2}\quad \text{のとき}$$

$$\mu(V/L)S_\Omega(x+iy,L;\alpha,\beta)=\sum_{h\in L'}e^{2\pi i\langle h,x\rangle}\xi_\Omega(y,h;\alpha,\beta)$$

と Fourier 展開されることがわかる. ここで, $\mu(V/L)$ は V/L の measure, $L'=\{h\in V\mid \langle h,L\rangle\subset\mathbb{Z}\}$ である.

前注意した様に, ξ_Ω は η_Ω を使って表現できるが, η_Ω は, 一般化された超幾何関数 ζ_Ω で表わせる. 以下, それを説明する. まず, 拡張された右半空間 $\mathbb{H}'=\Omega+iV$ を考える. そこで

$$\zeta_\Omega(z;\alpha,\beta)=\int_\Omega e^{-\langle z,x\rangle}N(x+1)^{\alpha-\frac{n}{r}}N(x)^{\beta-\frac{n}{r}}d(x)\quad,\quad z\in\mathbb{H}',$$

とおく. これが, 一般化された超幾何関数である. 特に, $n=1$ の場合を考えると

$$\zeta_\Omega(g;\alpha,\beta)=\int_0^\infty e^{-gt}(t+1)^{\alpha-1}t^{\beta-1}dt\quad,\quad(0<g\in\mathbb{R})$$

であり, これが, 古典的な超幾何関数である. 関数 η_Ω と

ζ_Ω の関係は次の通り.

$$\eta_\Omega(g,1;\alpha,\beta) = e^{-\langle g,1\rangle} 2^{\alpha+\beta-\frac{n}{r}} \zeta_\Omega(2g;\alpha,\beta), \quad g \in \Omega .$$

最初の定理は、次の様に述べられる.

<u>定理 2.1.</u> (1) 関数 ζ_Ω は、$z \in \mathbb{H}'$, $\mathrm{Re}(\beta) > \frac{n}{r} - 1$ で収束し、(z,α,β) について正則関数となる.

(2). $\omega_\Omega(z;\alpha,\beta) = \Gamma_\Omega(\beta)^{-1} N(z)^\beta \zeta_\Omega(z;\alpha,\beta)$ とおく. すると関数 ω_Ω は $\mathbb{H}' \times \mathbb{C}^2$ 全体に正則関数として解析接続され

$$\omega_\Omega(z;\tfrac{n}{r}-\beta, \tfrac{n}{r}-\alpha) = \omega_\Omega(z;\alpha,\beta)$$

なる関数等式を満たす.

(3). $\mathbb{C}^2$ 内の任意の compact 集合 T に対して、T のみに依存して決まる定数 $A, B > 0$ が存在して

$$|\omega_\Omega(g;\alpha,\beta)| \leqq A(1+\mu(g)^{-B}), \quad g \in \Omega, \ (\alpha,\beta) \in T .$$

ここで $\mu(g)$ は、$g \in \Omega$ の *minimum* な固有値.

この定理は、S_Ω の Fourier 展開の係数 $\zeta_\Omega(y,h;\alpha,\beta)$ のうち $h \in L' \cap \Omega$ なるものについては、その性質や評価が与えられたことを示している. そこで、一般の $h \in L'$ に

対するFourier係数を調べてみる．まず，初めに，$h \in V$ $g \in \Omega$について，Vの単位え1をgにうつすG^0の1つのえをaとしたとき，$ah \in V$の固有値を，gに相対するhの固有値と呼ぶことにする（[2]）．§1で述べた自己同型群Kの性質より，gに相対するhの固有値は，G^0のえaのとり方によらないことがわかる．そこで，次の様におく．

$\delta_+(hg)$ = gに相対するhの固有値の中で正のもの全体の積

$\delta_-(hg) = \delta_+((-h)g)$

$\tau_+(hg)$ = gに相対するhの固有値の中で正のもの全体の和

$\tau_-(hg) = \tau_+((-h)g)$

$\tau(hg) = \tau_+(hg) + \tau_-(hg)$

$\mu(hg)$ = gに相対するhの固有値の中で非零で，絶対値最小のもの；ただし，$h=0$のときは $\mu(hg) = 1$.

Vの単純Jordan部分環$V^{(k)}$を

$$V^{(k)} = \bigoplus_{i,j \leq k} V_{ij}$$

で定義し，前と同様に定義した $V^{(k)}$ 内の錐を $\Omega^{(k)}$ とおく．錐 $\Omega^{(k)}$ に付随するガンマ関数 $\Gamma_{\Omega^{(k)}}(s)$ を，簡単のために $\Gamma_k(s)$ で表わす．そこで

$g \in \Omega$，$h \in V(p,q,s)$ に対して

$$\omega_\Omega(g,h;\alpha,\beta) = 2^{-p\alpha-q\beta}\,\Gamma_p\left(\beta-\frac{d}{2}(m-p)\right)^{-1}\Gamma_q\left(\alpha-\frac{d}{2}(m-q)\right)^{-1}$$
$$\times\,\Gamma_s\left(\alpha+\beta-\frac{n}{r}\right)^{-1}\delta_+(hg)^{\frac{n}{r}-\alpha-\frac{qd}{4}}\,\delta_-(hg)^{\frac{n}{r}-\beta-\frac{pd}{4}}$$
$$\times\,N(g)^{\alpha+\beta-\frac{n}{r}}\,\eta_\Omega(g,h;\alpha,\beta),$$

とおく．定理 2.1 の拡張である主定理は，次のものである．

<u>定理 2.2</u>．上で定義した関数 ω_Ω は，(α,β) の正則関数として $\mathbb{C}^2$ 全体に解析接続され，次の関数等式を満たす．

$$\omega_\Omega(g,h;\alpha,\beta) = \omega_\Omega\left(g,h;\frac{n}{r}+\frac{ds}{2}-\beta,\ \frac{n}{r}+\frac{ds}{2}-\alpha\right).$$

さらに，$\mathbb{C}^2$ 内の任意の compact 集合 T に対して，T のみに依存して決まる正定数 A，B が存在して，次の評価式が成立する

$$|\omega_\Omega(g,h;\alpha,\beta)| \leqq A\,e^{-\frac{\tau(hg)}{2}}\left(1+\mu(hg)^{-B}\right)$$
$$\text{for } \forall(g,h)\in\Omega\times V,\quad \forall(\alpha,\beta)\in T.$$

以上の結果を応用して，S_Ω の性質が調べられる．

一般に，$\mathbb{R}^m$ 内の lattice L が algebraic であるとは，L の各元が，代数的数からなる成分をもつときをいうものとする．V の $\mathbb{Q}$-構造を固定したとき，V の algebraic lattice の概念が定義できる．定理 2.2 を使って Fourier 係数を調べることにより，次の結果が得られる．

定理 2.3．L を V 内の algebraic lattice とする．すると

$$\Gamma_\Omega(\alpha+\beta-\tfrac{n}{r})^{-1}\, \zeta_\Omega(z, L; \alpha, \beta)$$

は，(α, β) の正則関数として $\mathbb{C}^2$ 全体に解析接続される．

最後に，上記定理の応用として得られる，いくつかの結果を述べる．L を必ずしも algebraic とは限らない V 内の lattice とする．そして，無限級数 $\zeta_\Omega(z, L; \alpha)$，$\zeta^*(z, L; \alpha)$ を

$$\zeta_\Omega(z, L; \alpha) = \sum_{a \in L} N(z+a)^{-\alpha}$$

$$\zeta^*_\Omega(z, L; \alpha) = \lim_{s \to 0} \zeta_\Omega(z, L; \alpha+s, s)$$

で定義する．すると，$Re(\alpha) > \frac{2n}{r} - 1$ であれば ζ_Ω は収束し，そこで ζ^*_Ω と一致する．さらに，次が言える．

定理 2.4. L を V 内の algebraic lattice とし，さらに $\mathrm{Re}(\alpha) > \frac{n}{r}$ と仮定する．すると，次の場合を除外して，S_Ω と S_Ω^* は一致する．

1) $d=1$ のときの $\alpha = \frac{n}{2}+1 \ (= \frac{n}{r}+\frac{1}{2})$

2) $r=2$, $n \geqq 2$: odd のときの $\frac{n}{2} < \alpha \leqq n-1$, $\alpha \in \mathbb{Z}$.

注意：1), 2) の場合のそれぞれに対応する上半空間は，Siegel 上半空間，IV 型領域と呼ばれるものである．

文献

[1] I. Satake: Algebraic Structures of Symmetric Domains, Iwanami-Shoten and Princeton Univ. Press, 1980

[2] G. Shimura: Confluent hypergeometric functions on tube domains, Math. Ann. 260 (1982)

[3] G. Shimura: On Eisenstein series, Duke Math. J. 50 (1983).