数理解析研究所講究録
第549巻 1985年 41-51

$\mathbb{Z}G$-lattice の complexity に関する Webb の仕事の紹介

山口大学教育学部　佐々木洋城

(Hiroki Sasaki)

Gを有限群，kを標数pの体とする。有限生成kG加群Mの complexity $c_{kG}(M)$ は Alperin-Evens [1] によって定義された。すなわちMの極小射影分解を

$$\cdots \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

とすれば

$$c_{kG}(M) = \min\{c \in \mathbb{Z} \mid c \geq 0,\ \text{s.t.}\ \exists \mu > 0\ \text{s.t.}\ \text{十分大きな全ての}\ n\ \text{に対して}\ \dim_k P_n \leq \mu n^{c-1}\}.$$

群環kGは self injective であるから$c_{kG}(M)=0$とMが射影的であることと同値であり，Alperin [2] により$c_{kG}(M)=1$とMが周期的であることとは同値である。ここでMが周期的であるとは

$$0 \to M \to S_n \to \cdots \to S_1 \to S_0 \to M \to 0,\quad S_i\text{は射影的}$$

なる完全系列が存在することである。

以下では考える加群はすべて有限生成である。k上の次数付加群 $A=\bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ $\quad \dim_k A_i<\infty$ に対して

$$\gamma(A) = \min\{g \in \mathbb{Z} \mid g \geq 0,\ \text{s.t. } \exists \mu > 0 \ \text{s.t. 十分大きな全ての } n \text{ に対して } \dim_k A_n \leq \mu n^{g-1}\}$$

とおく。

補題 1 (Alperin-Evens, Carlson)

(1) $c_{kG}(M) \leq c_{kG}(k)$ $\quad M$: kG 加群, k を自明な kG-加群とみる.

(2) kG 加群 M, $G \geq H$, kH 加群 L に対して

$$c_{kH}(M_H) \leq c_{kG}(M), \qquad c_{kG}(L^G) \leq c_{kH}(L),$$

ここで $M_H = Res_H^G(M)$, $L^G = Ind_H^G(L)$.

(3) S を G の Sylow p 部分群とすれば $c_{kG}(M) = c_{kS}(M_S)$.

(4)
$$c_{kG}(M) = \max_{T \text{は既約} kG \text{加群を動く}} \gamma(Ext^*_{kG}(M, T))$$

$$= \max_{N \text{は} kG \text{加群を動く}} \gamma(Ext^*_{kG}(M, N)).$$

(5) G が p 群のとき $c_{kG}(M) = \gamma(H^*(G, M))$.

(6) $M^* = Hom_k(M, k)$ とすれば $c_{kG}(M) = c_{kG}(M^*)$.

Alperin-Evens によって得られた基本定理は次の定理である。$\mathcal{E}_p(G)$ によって G の基本可換 p 群の全体を表わす。

定理2 (Alperin - Evens [1])

$$c_{kG}(M) = \max_{E \in \mathcal{E}_p(G)} c_{kE}(M_E).$$

この系として直ちに

系3 (1) (Chouinard [6]) Mが射影的 ⇔ $\forall E \in \mathcal{E}_p(G)$に対して M_E が射影的.

(2) Mが周期的 ⇔ $\forall E \in \mathcal{E}_p(G)$ に対して M_E が周期的.

定理2の証明はいくつか知られ、特にCarlsonは次を示した。kG 加群Mに対して

$M = \mathfrak{f}_G(M) \oplus \mathfrak{p}_G(M)$, $\mathfrak{f}_G(M)$ は射影的, $\mathfrak{p}_G(M)$ は射影的直和因子をもたない

とおく。

定理4 (Carlson [3]) $\exists B_G \in \mathbb{N}$ (Gのみによって定まる) s.t. 任意の kG加群 M with $\mathfrak{f}_G(M)=0$ に対して

$$\dim_k M \leq B_G \cdot \max_{E \in \mathcal{E}_p(G)} \dim \mathfrak{p}_E(M_E).$$

kG 加群Mの極小射影分解を

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_n \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & P_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
& & K_{n-1} \arrow[ur, tail] & & & & K_2 \arrow[ur, tail] & & K_1 \arrow[ur, tail] & & &
\end{tikzcd}
$$

とすれば $\rho_G(K_i)=0$ かつ $c_{kG}(M)=\gamma(\oplus P_i)=\gamma(\oplus K_i)$.

定理4により

$$
\begin{aligned}
\dim_k K_i &\le B_G \cdot \max_{E\in\mathcal{E}_p(G)} \dim_k \rho_E({K_i}_E) \\
&= B_G \cdot \max_{E\in\mathcal{E}_p(G)} \dim_k \Omega^i(M_E)
\end{aligned}
$$

である。これから定理2を得る。

以上の integral version について紹介する。

$\mathbb{Z}G$-lattice Mに対して

$M = \mathrm{proj}(M) \oplus \mathrm{core}(M)$,

$\mathrm{proj}(M)$は射影的$\mathbb{Z}G$-sublattice,

$\mathrm{core}(M)$は射影的直和因子をもたない$\mathbb{Z}G$-sublattice

と分解する。$\mathrm{proj}(M)$, $\mathrm{core}(M)$は genus 性を除いて一意的である。

Mの射影分解

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_n \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & P_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
& & K_{n-1} \arrow[ur, tail] & & & & K_0 \arrow[ur, tail] & & &
\end{tikzcd}
\qquad (*)
$$

が極小であるとは、各iに対してP_iがK_iを像にもつような最小rankの射影的$\mathbb{Z}G$-latticeであることをいう。

これは、各iに対して $\mathrm{proj}(K_i)=0$ であることと同値である。$\mathbb{Z}G$-lattice Mの極小射影分解を(*)として、Mのcomplexity $c_{\mathbb{Z}G}(M)$を

$$c_{\mathbb{Z}G}(M) = \min\{c\in\mathbb{Z} \mid c\geq 0 \text{ s.t. } \exists\lambda>0 \text{ s.t. 十分大きな全ての } n \text{ に対して } \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} P_n \leq \lambda n^{c-1}\}$$

によって定義する。

$c_{\mathbb{Z}G}(M)=0$であることとMが射影的であることは同値である。またMが周期的であることを

$0\to M\to A_n\to\cdots\to A_0\to M\to 0$, 各$A_i$は射影的

であるような完全系列が存在することと定義すれば、$c_{\mathbb{Z}G}(M)=1$であることと、Mが周期的であることは同値である。(Webb) 実際, $c_{\mathbb{Z}G}(M)=1$とすれば十分大きなiに対して $\mathrm{rank}\,P_i\leq\lambda$. よってJordan-Zassenhausの定理によってある$i,j,i>j$に対してK_iとK_jは同型である。このとき $K_i \vee K_{j-1}$. これを続けて $K_{i-j-1}\vee M$ を得る。push-out図式

$$\begin{array}{ccccc} K_{i-j-1} & \rightarrowtail & P_{i-j-1} & \twoheadrightarrow & K_{i-j-2} \\ \downarrow & p.o. & \downarrow & & \| \\ M & \rightarrowtail & Q & \twoheadrightarrow & K_{i-j-2} \end{array}$$

を考えることによりQは射影的である。下段の完全系列を(*)につけ加えれば

$$0\to M\to Q\to P_{i-j-2}\to\cdots\to P_0\to M\to 0.$$

すなわちMは周期的である。逆は明らか。

Dress [7] の定理により、$|G|$の素因数pに対して一つのSylow p部分群 S_p を定めておけば

$$M \mid \oplus\sum_p (M_{S_p})^G$$

であるから

$$c_{\mathbb{Z}G}(M) = \max_p c_{\mathbb{Z}S_p}(M_{S_p})$$

を得る。Gがp群のときMの射影分解

$$\cdots \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

が極小であることと$\mathbb{F}_p G$加群 M/pM の射影分解

$$\cdots \to P_n/pP_n \to \cdots \to P_1/pP_1 \to P_0/pP_0 \to M/pM \to 0$$

が極小であることは同値であるから

$$c_{\mathbb{Z}G}(M) = c_{\mathbb{F}_p G}(M/pM).$$

よってGが一般のとき

$$\begin{aligned} c_{\mathbb{Z}G}(M) &= \max_p c_{\mathbb{Z}S_p}(M_{S_p}) \\ &= \max_p c_{\mathbb{F}_p S_p}(M/pM) \\ &= \max_p \max_{E\in\mathcal{E}_p(G)} c_{\mathbb{F}_p E}(M/pM) \\ &= \max_p \max_{E\in\mathcal{E}_p(G)} c_{\mathbb{Z}E}(M_E). \end{aligned}$$

定理5　$c_{\mathbb{Z}G}(M) = \max_p \max_{E\in\mathcal{E}_p(G)} c_{\mathbb{Z}E}(M_E).$

(Talleli [9])

系 6. (1) $\mathbb{Z}G$-lattice Mが射影的$\Leftrightarrow$ $\forall p \mid |G|$ $\forall E \in \mathcal{E}_p(G)$

M_E が射影的.

(2) Mが周期的$\Leftrightarrow$ $\forall p \mid |G|$ $\forall E \in \mathcal{E}_p(G)$ M_E が周期的.

さて Webbは

定理 7 (Webb [10]) $\exists B_G \in \mathbb{N}$

s.t. $\mathbb{Z}G$-lattice Mが射影的直和因子をもたないならば

$$\exists p, \exists E \in \mathcal{E}_p(G) \quad \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}(M) \leq B_G \, \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{core}(M_E)).$$

を示し、これから $\exists p, \exists E \in \mathcal{E}_p(G)$ s.t. $c_{\mathbb{Z}G}(M) = c_{\mathbb{Z}E}(M_E)$

を次のように導いた。

$\mathbb{Z}G$-lattice Mの極小射影分解を(*)とすれば各K_iに対して素数p_i, $E_i \in \mathcal{E}_{p_i}(G)$が存在して

$$\mathrm{rank}\, K_i \leq B_G \cdot \mathrm{rank}\,(\mathrm{core}\,({K_i}_{E_i})).$$

Gの部分群は有限個しかないから$\{E_i \mid i \in \mathbb{N}\}$は有限集合である。よってある素数$p$とある$E \in \mathcal{E}_p(G)$に対し

$$\mathrm{rank}\, K_i \leq B_G \, \mathrm{rank}\,(\mathrm{core}\,({K_i}_E))$$

が無限個のiについて成り立つ。

$${K_i}_E = L_i \oplus A_i, \quad L_i = \mathrm{core}\,({K_i}_E), \; A_i = \mathrm{proj}\,({K_i}_E)$$

とおく。このとき $\mathrm{core}(M_E)$ の極小射影分解

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & Q_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & Q_0 \arrow[r] & \mathrm{core}(M_E) \arrow[r] & 0 \\
& & L_1 \arrow[ur, hook] & & L_0 \arrow[ur, hook] & & &
\end{tikzcd}$$

で、

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots \arrow[r] & Q_2 \oplus A_2 \oplus A_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & Q_1 \oplus A_1 \oplus A_0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & Q_0 \oplus A_0 \oplus \mathrm{proj}(M_E) \arrow[r] & M_E \arrow[r] & 0 \\
& & K_1 \arrow[ur, hook] & & K_0 \arrow[ur, hook] & & &
\end{tikzcd}$$

が(*)のEへの制限であるようにとることができる。さて

$$\mathrm{rank}\, P_{i+1} \leq |G|\,\mathrm{rank}\, K_i, \quad \mathrm{rank}\, L_i \leq \mathrm{rank}\, Q_i$$

であるから無限に多くのiに対して

$$\mathrm{rank}\, P_{i+1} \leq B_G \cdot |G|\,\mathrm{rank}\, Q_i .$$

よってある定数λに対して

$$\mathrm{rank}\, P_i \leq \lambda\, \mathrm{rank}\, Q_i$$

が十分大きなすべてのiに対して成り立つ。ゆえに

$$c_{\mathbb{Z}G}(M) \leq c_{\mathbb{Z}E}(M_E).$$

$$\therefore \quad c_{\mathbb{Z}G}(M) = c_{\mathbb{Z}E}(M_E).$$

定理7の証明の鍵は次の事実である。$\mathbb{Z}G$-lattice Mと素数pに対して

$$\sigma_p(M) = \mathrm{rank}_{\hat{\mathbb{Z}}_{(p)}}\left(\mathrm{core}(\hat{M}_{(p)})\right),$$

とおき

$$\sigma(M) = \max_{p \mid |G|} \sigma_p(M)$$

とおく。

補題8　次の条件を満たす定数B_1が存在する：
$\mathbb{Z}G$-lattice Mが射影的直和因子をもたなければ

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} M \leq B_1 \sigma(M).$$

この補題から定理7は定理4を用いて比較的容易に得られる。ここでは補題8の証明を略述して本稿を終わる。

Mの通常指標をχとする。Gの1でない任意の元xに対して$|\chi(x)| \leq \sigma(M)$である。Mが射影的直和因子をもたないことから、$|G|$のある素因数gと直既約射影的$\hat{\mathbb{Z}}_{(g)}G$-lattice Aがあって、Aの$\hat{M}_{(g)}$における重複度が$\hat{\mathbb{Z}}_{(g)}G$におけるそれよりも小さい。$\eta_1, \cdots, \eta_s$を直既約射影的$\hat{\mathbb{Z}}_{(g)}G$加群の指標とする。$\mu_1\eta_1 + \cdots + \mu_s\eta_s$ $(\mu_i \in \mathbb{Z})$を正則指標とする。
$\mathrm{proj}(\hat{M}_{(g)})$の指標を$\chi_{proj} = \lambda_1\eta_1 + \cdots + \lambda_s\eta_s$ $(\lambda_i \in \mathbb{Z})$とすればある$j$に対して$\lambda_j < \eta_j$である。$G$の1でない任意の元$x$に対して

$$\frac{1}{\sigma(M)} \left| \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \eta_i(x) \right| \leq 2$$

を得る。

$\{1 = x_1, x_2, \cdots, x_r\}$を$G$の$g$正則共役類の代表系とする。
(s, r)行列$H = (\eta_i(x_j))$の階数はsである。

$$T = \{ (y, 0, \cdots, 0) \in K^r \mid y \in K \}$$

$$U = \{ (y_1, \cdots, y_r) \in K^r \mid y_1 = 0, \ |y_i| \leq 2 \ \forall i \}$$

とおく。ここでKはGの分解体（⊂ $\mathbb{C}$）である。$\eta_i(x_j)$ をKの元とみる。

$$\frac{1}{\sigma(M)}(\lambda_1, \cdots, \lambda_s)H \in T + U$$
$$K(\mu_1, \cdots, \mu_s)H = T$$

である。Hの階数が s であるから，(r, s) 行列 X で $HX = E_s$ となるものがある。$(T+U)X$ の各点と直線 $K(\mu_1, \cdots, \mu_s)$ との距離は有界である。d をその上界とし，$c \in K$ を

$$d\left(\frac{1}{\sigma(M)}(\lambda_1, \cdots, \lambda_s),\ c(\mu_1, \cdots, \mu_s)\right) \leq d$$

なるものとする。このとき各 j に対して $\left|\frac{1}{\sigma(M)}\lambda_j - \mu_j\right| \leq d$ である。一方ある j に対して $0 \leq \lambda_j < \mu_j$，$\sigma(M) \geqq 1$ であるから

$$|c| \leq 2 + \frac{d}{\mu_j} \leq 2 + \max\left\{\frac{1}{\mu_1}, \cdots, \frac{1}{\mu_s}\right\} \cdot d$$

を得るが，右辺の値は g のみによって定まる値である。よって $\frac{1}{\sigma(M)}(\lambda_1, \cdots, \lambda_s)$ は K^s の有界領域にある。従ってある定数 b_g に対して

$$\max\{\lambda_1, \cdots, \lambda_s\} \leq b_g\, \sigma(M)$$

となる。

$f_g = \eta_1(1) + \cdots + \eta_s(1)$ とおき他の素数 p に対しても同様に b_p, f_p を定義し

$$B_1 = 1 + \max\{b_p f_p \mid p \mid |G|\}$$

とおけばよい。

文 献

[1] J.Alperin and L.Evens, Representations,resolutions and Quillen's dimension theorem, J.Pure Appl. Algebra 22(1981) 1-9.

[2] J.Alperin, Periodicity in groups, Illinois J. Math. 21 (1977) 776-783.

[3] J.F.Carlson, The dimensions of modules and thei restrictions over modular group algebras, J.Pure Appl. Algebra 22 (1981) 43-56.

[4] J.F.Carlson, The complexicty and varieties of modules, in Springer Lecture Note Ser.882 Integral Representations and Applications, 415-422.

[5] J.F.Carlson, Complexity and Krull dimension, in Springer Lecture Note Ser.903 Representations of Algebra, 62-67.

[6] L.G.Chouinard, Projectivity and relative projectivity over group rings, J.Pure Appl. Algebra 7 (1976) 278-302.

[7] A.Dress, Verticies of Integral representaions, Math. Z. 114 (1970) 159-169.

[8] K.W.Gruenberg, Relation modules of finite groups, Amer. Math. Soc. Regional Conf. Ser. 25 (1975).

[9] O.Talleli, On cohomological periodicity of ZG-lattices, Math. Z. 169 (1979) 119-126.

[10] P.J.Webb, Bounding the ranks of ZG-lattices by their restrictions to elementary abelian subgroups, J. Pure Appl. Algebra (1982) 311-318.