数理解析研究所講究録
第552巻 1985年 1-10

推移力学系に対応するC^*環上のステート

東北大教養　武元英夫　(Hideo Takemoto)

序論. 推移力学系に対応するC^*環については多くの人達によって研究されてきた。これらのC^*環は可換なC^*環上の自己同型写像による接合積で表わすことが出来ることより、本講では、この可換なC^*環上の pure state の拡大について考えていく。しかも、この拡大の一意性と、力学系との関係で、minimality，さらに、可換なC^*環を接合積にうめこんだ場合での，maximality 等の関係について調べていく。

完全正規直交系$\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$をもつヒルベルト空間Hを本講では固定した概念として用いていく。ここで，$\mathbb{Z}$はすべての整数の集合を表わしている。

コンパクト・ハウスドルフ空間ΩからΩ上への同型(位相的)写像σと，$\mathbb{Z}$からΩへの写像φで，$\varphi(\mathbb{Z})$がΩで稠密である場合，系$\Sigma=(\Omega,\sigma,\varphi)$が推移力学系と呼ばれるのは$\sigma(\varphi(n))=\varphi(n+1)$，$n\in\mathbb{Z}$が成立している場合である。

推移力学系 $\Sigma=(\Omega,\sigma,\varphi)$ に対応して，我々は H 上の有界線形作用素からなる C^* 環 $C^*(\Sigma)$ を次のように定義する。

S を $Se_n = e_{n+1}$, $n\in\mathbb{Z}$ によって定まる H 上のユニタリ作用素であるが、本講では S を推移作用素と呼ぶことにする。Ω 上の複素数値連続関数全体からなる可換な C^* 環を $C(\Omega)$ と書いていく。$f\in C(\Omega)$ に対し，H 上の作用素 $\pi(f)$ を $\pi(f)e_n = f(\varphi(n))e_n$, $n\in\mathbb{Z}$ によって定義する。そのとき，$\pi(f)$ を f に対応することによって，$\pi(C(\Omega))=\{\pi(f)\ ;\ f\in C(\Omega)\}$ と $C(\Omega)$ は $*$ 同型になる。さらに，$S\pi(C(\Omega))S^* = \pi(C(\Omega))$, $S\pi(f)S^* = \pi(\sigma^{-1}f)$ が成立している。但し，$(\sigma^{-1}f)(\omega) = f(\sigma^{-1}\omega)$, $\omega\in\Omega$ を表わしている。そこで，$\{\pi(C(\Omega)), S\}$ によって生成される C^* 環を $C^*(\Sigma)$ と表わし，推移力学系 $\Sigma=(\Omega,\sigma,\varphi)$ に対応する C^* 環と呼んでいく。すると，$\alpha(\pi(f)) = S\pi(f)S^*$, $f\in C(\Omega)$, によって定まる $\pi(C(\Omega))$ 上の $*$ 同型写像 α による接合積（C^* 環としての）$\pi(C(\Omega))\times_\alpha\mathbb{Z}$ と $C^*(\Sigma)$ が同型であることが知られている（O'Donovan[ ]，河村－武元[ ]）。さらに、我々は $C^*(\Sigma)$ に対し，次の性質を持つ．P_n を H から 1 次元部分空間 $[e_n]$ への射影写像とする．$a=(a_n)\in\ell^\infty(\mathbb{Z})$ に対し，$\pi(a)e_n = a_ne_n$, $n\in\mathbb{Z}$ によって H 上の作用素 $\pi(a)$ が定義される．すると，$\pi(f)$, $f\in C(\Omega)$, は数列 $(f(\varphi(n)))$ によって $\pi(\ell^\infty(\mathbb{Z}))$ の元とみられる。すなわち，$\pi(C(\Omega))$ は $\pi(\ell^\infty(\mathbb{Z}))$ の C^* 部分環と考えられる。

逆に，$\mathcal{A}$ を $S\mathcal{A}S^* = \mathcal{A}$ となる $\pi(\ell^\infty(\mathbb{Z}))$ の C^* 部分環とすると，$\mathcal{A}$ に対応して推移力学系 $\Sigma = (\Omega, \sigma, \varphi)$ が次のように得られる。α を $\alpha(T) = STS^*$, $T \in \mathcal{A}$, によって得られる $\mathcal{A}$ の $*$ 同型とする。Ω を $\mathcal{A}$ の spectrum space とすると，α に対し，$\alpha(\pi(a))\hat{}(\omega) = \pi(a)\hat{}(\sigma^{-1}\omega)$, $\omega \in \Omega$, となる Ω から Ω 上への位相同型写像 σ が得られる。さらに，$\pi(a) = \pi((a_n)) \in \mathcal{A}$ に対し，$\varphi(n)(\pi(a)) = a_n$ とおくと，$\varphi(n)$ は $\mathcal{A}$ から $\mathbb{C}$ への準同型写像となる．これから，$\varphi(n)$ は Ω の元となり，$\sigma(\varphi(n)) = \varphi(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, も示される。これによって我々は推移力学系 $\Sigma = (\Omega, \sigma, \varphi)$ を得る。

推移力学系 $\Sigma = (\Omega, \sigma, \varphi)$ に対し，$C^*(\Sigma)$ から $\pi(C(\Omega))$ 上へのノルム 1 の射影 E_Σ が次のように得られる。$T \in B(H)$ に対し，P_n が 1 次元射影という事を考えると，$E(T) = \sum P_n T P_n$ によって定義される作用素 E は $B(H)$ から $\pi(\ell^\infty(\mathbb{Z}))$ へのノルム 1 の射影となる。これの $C^*(\Sigma)$ への制限を E_Σ とおくと求めるものが得られる．特に，$\{f_k\}_{k=-m}^{m} \subset C(\Omega)$ に対し，$E_\Sigma\left(\sum_{k=-m}^{m} \pi(f_k) S^k\right) = \pi(f_0)$ となっている。

$\pi(C(\Omega))$ 上のどんな pure state も Ω の元 ω によって $\varphi_\omega(\pi(f)) = f(\omega)$, $f \in C(\Omega)$, となる pure state φ_ω によって完全に決定されている．本講では，φ_ω の $C^*(\Sigma)$ への拡大について考える．この拡大の一意性と推移力学系 $(\Omega, \sigma, \varphi)$ の minimality との関係，さらに，$C^*(\Sigma)$ の可換 C^* 環となっている $\pi(C(\Omega))$ の

maximality との関係について調べる。$\varphi_\omega \circ E_\Sigma$ が φ_ω の $C^*(\Sigma)$ への1つの state としての拡大になっている事を考えると，φ_ω の $C^*(\Sigma)$ への state の拡大が一意であるかという事は，stateの拡大が $\varphi_\omega \circ E_\Sigma$ だけであるかを調べることと同じである。

結果．推移力学系 $\Sigma = (\Omega, \sigma, \varphi)$ に対応する C^* 環 $C^*(\Sigma)$ に対し，$Irr_n(C^*(\Sigma))$ を $C^*(\Sigma)$ の n 次元ヒルベルト空間上への既約表現の集合とする。$\Omega_n = \{\omega \in \Omega ;\ \sigma^n\omega = \omega,\ \sigma^k\omega \neq \omega,\ 1 \leq k \leq n-1\}$ とおく。その時，河村－富山－綿谷［ ］は $Irr_n(C^*(\Sigma))$ と $\Omega_n \times \mathbb{T}/\sim$ （$\sim$ はある意味での同値類，［ ］を見よ）位相同値であることを示している。本講では，この考えの下で，ω の periodicity と対応して次の事をもつ。

命題1．推移力学系 $\Sigma = (\Omega, \varphi, \sigma)$ と点 $\omega \in \Omega$ を与える。$\omega \in \Omega_n$ であるならば，$C^*(\Sigma)$ 上の state ψ で，$\psi \neq \varphi_\omega \circ E_\Sigma$，$\psi | \pi(C(\Omega)) = \varphi_\omega$ かつ，ψ によって導入される表現空間 (π_ψ, H_ψ) は n 次元空間上への既約表現となっている。

逆に，ρ を $C^*(\Sigma)$ の n 次元ヒルベルト空間への既約表現とすると，$\Omega_n \ni \omega$ と，φ_ω の state 拡大 ψ が存在し，ρ と π_ψ はユニタリ同値となる。

命題1によって，$\omega\in\Omega$がperiodic pointであるときは，φ_ωのstate拡大は一意でないことが示された．それでは，$\omega\in\Omega$がperiodic pointでないときはどうであるかを調べる．それに対して，我々は次の性質を知ることによって，そのような点ωに対し，φ_ωのstate拡大は$\varphi_\omega\circ E_\Sigma$だけであることを示すことができる．

補題2．$\mathfrak{A}$を単位元をもつC^*環とする．ψを$\mathfrak{A}$上のstateとして，今，$\mathfrak{A}$の元Aが$|\psi(A)|=\|A\|$となっているとすれば，すべての$B\in\mathfrak{A}$に対し，$\psi(AB)=\psi(A)\psi(B)=\psi(BA)$が成立する．

以上より，次の定理が得られる．

定理3．推移力学系$\Sigma=(\Omega,\sigma,\varphi)$に対し，$\Omega$は無限集合であるとする．$\omega\in\Omega$に対し，$\varphi_\omega\circ E_\Sigma$が$\varphi_\omega$の一意なstate拡大である必要十分条件は$\omega$がperiodic pointでないことである．

推移力学系$\Sigma=(\Omega,\sigma,\varphi)$がminimalであるとは，$\sigma F\subseteq F$となる$\Omega$の閉集合$F$は$\phi$または$\Omega$だけである．これから，$\Sigma$が

minimalであるときは，Ωが有限集合か，または，Ωはperiodic point をもたない．これから，$\Sigma=(\Omega,\sigma,\varphi)$ がminimalな推移力学系であって，Ωが無限集合であるとき，Ωのどんな点ωに対して，φ_ωは一意なstate拡大をもつことになる。しかし，これの逆が一般に成立しないことが，次の例からわかる。

例4．$\mathbb{Z}$のStone-Čechコンパクト化 $\beta\mathbb{Z}$ に対し，推移力学系 $\Sigma=(\beta\mathbb{Z},\sigma,\varphi)$ を次のように定義する。整数からなるnet $\omega=\{n_\alpha\}\in\beta\mathbb{Z}$に対し，$\sigma(\{n_\alpha\})=\{n_\alpha+1\}$ によって $\beta\mathbb{Z}$ から$\beta\mathbb{Z}$上への位相同型写像σを定める。φを$\mathbb{Z}$の$\beta\mathbb{Z}$への自然な埋め込みとする。すると，$\Sigma=(\beta\mathbb{Z},\sigma,\varphi)$ は推移力学系となっている。その時，Σはminimalでない力学系であることは明らかであり，さらに，Stone-Čechのコンパクト化の定義よりこの力学系がperiodic point を持たないことが示される。

推移力学系$\Sigma=(\Omega,\sigma,\varphi)$に対し，$\pi(C(\Omega))$上のstate φ_ωの $C^*(\Sigma)$ へのstateとしての拡大が一意であるかどうかは，ωがσに関してperiodic point であるかどうかという事で完全に決定された。さらに，各点$\omega\in\Omega$に対するstate φ_ωが $C^*(\Sigma)$ へのstateとしての拡大の一意性と力学系$\Sigma=(\Omega,\sigma,\varphi)$

の minimality についての関係についても調べた。次に可換な C^*環 $\pi(C(\Omega))$ の $C^*(\Sigma)$ での maximality と各点 $\omega\in\Omega$ に対応する state φ_ω の $C^*(\Sigma)$ への state としての拡大の一意性との関係について調べよう。すべての点 $\omega\in\Omega$ に対して，φ_ω の拡大が一意であるならば，$\pi(C(\Omega))$ が $C^*(\Sigma)$ で maximal な可換 C^*環であることは Stone-Weierstrass の定理によって明らかである。ここで，以下で示すことより，逆がかならずしも成立しないという事を示そう。

命題5. 推移力学系 $\Sigma=(\Omega,\sigma,\varphi)$ において，Ω が無限集合であるとする。その時，$\pi(C(\Omega))$ は $C^*(\Sigma)$ で maximal な可換 C^*環である。

証明. Ω が無限集合であるので，河村-武元[; Proposition 1, 2] によって φ は injective である。さらに，序論で述べた注意によって，$\ell^\infty(\mathbb{Z})$ の C^*部分環 $\mathcal{A}$ が存在し，$\pi(\mathcal{A})=\pi(C(\Omega))$ となっている。しかも，このとき，$\phi(n)(\pi(a))=a_n$，$a=(a_n)\in\mathcal{A}$ が成立している。T をすべての $a=(a_n)\in\mathcal{A}$ に対し，$T\pi(a)=\pi(a)T$ となる $C^*(\Sigma)$ の元とする。この T に対し，各 $n\in\mathbb{Z}$ に関し，$Te_n=\sum\lambda_\ell^{(n)}e_\ell$ とおく。すると，各 $a=(a_n)\in\mathcal{A}$ と $n\in\mathbb{Z}$ に対して次の式が成立する。

$$T\pi(\mathbf{a})e_n = a_n \sum \lambda_\ell^{(n)} e_\ell, \quad \pi(\mathbf{a})Te_n = \sum a_\ell \lambda_\ell^{(n)} e_\ell .$$

これから，すべての $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して，$a_n \lambda_m^{(n)} = a_m \lambda_m^{(n)}$ が成立している。今，φ が injective であるから，相異なるどんな２つの整数 m, n をもってきても，$a_m \neq a_n$ となる $\mathfrak{A}$ の元 $\mathbf{a} = (a_n)$ が存在する。このような，m, n と $\mathbf{a}$ を考えると，$\lambda_m^{(n)} = 0$ となる。従って，$m \neq n$ ならば，$\lambda_m^{(n)} = 0$ が成立する。そこで，$\lambda_n = \lambda_n^{(n)}$ とおくと，$Te_n = \lambda_n e_n$, $n \in \mathbb{Z}$ となる。従って，$TP_n = \lambda_n P_n$, $n \in \mathbb{Z}$ である。$\mathbf{b} = (\lambda_n) \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ とおくと，$T \in C^*(\Sigma)$ であることと，$E_\Sigma(T) = \pi(\mathbf{b}) \in \pi(C(\Omega)) = \pi(\mathfrak{A})$ であることから，$\pi(\mathbf{b}) = T \in \pi(C(\Omega))$ となります、従って，$\pi(C(\Omega))$ は $C^*(\Sigma)$ で maximal な可換 C^*環となっている。

すべての点 $\omega \in \Omega$ に対し，state φ_ω の $C^*(\Sigma)$ への state としての拡大が一意であるとき，前にも述べたように，$\pi(C(\Omega))$ が $C^*(\Sigma)$ において maximal な可換 C^*環となっている。しかし，これの逆が成立しないことは，上の命題５を考えると，次の例によって示される。

<u>例６</u>。ω_1 を負の整数全体の集合の集積点，ω_2 を自然数

全体の集合の集積点とする。$\Omega = \{\omega_1\} \cup \mathbb{Z} \cup \{\omega_2\}$ とする。σ は次のように定義される Ω から Ω 上への位相同型写像とする。$\sigma\omega_1 = \omega_1$, $\sigma\omega_2 = \omega_2$, $\sigma(n) = n+1$ $(n \in \mathbb{Z})$。さらに $\varphi(n) = n$, $n \in \mathbb{Z}$ によって $\mathbb{Z}$ から Ω への写像を定義する。そのとき，$\Sigma = (\Omega, \sigma, \varphi)$ が推移力学系になっていることは明らかである。今，Ω が無限集合であることより，命題5によって，$\pi(C(\Omega))$ は $C^*(\Sigma)$ において maximal な可換 C^* 環である。しかし，ω_1, ω_2 が σ に関し，不動点であることより states φ_{ω_1}, φ_{ω_2} は共に，$C^*(\Sigma)$ への state の拡大としては一意には拡大されない。

参考文献

[1] J. Bunce and J.A. Deddens, A family of simple C*-algebras related to weighted shift operators, J. Functional Analysis, 19(1975), 13 - 24.

[2] D.P. O'Donovan, Weighted shifts and covariance algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 208(1975), 1 - 25.

[3] P. Ghatage and W.J. Phillips, C*-algebras generated by weighted shift II, Indiana Univ. Math. J., 30(1981), 539 - 546.

[4] P. Green, C*-algebras of transformation groups with smooth orbit space, Pacific J. Math., 72(1977), 71 - 97.

[5] S. Kawamura and H. Takemoto, C*-algebras associated with shift dynamical systems, J. Math. Soc. Japan, 36(1984), 279 - 293.

[6] S. Kawamura, J. Tomiyama and Y. Watatani, Finite-dimensional irreducible representations of C*-algebras associated

with topological dynamical systems, to appear in Math. Scand.

[7] S.C. Power, Simplicity of C*-algebras of minimal dynamic systems, J. London Math. Soc., 18(1978), 534 - 538.

[8] N. Riedel, Classification of the C*-algebras associated with minimal rotations, Pacific J. Math., 101(1982), 153 - 162.