数理解析研究所講究録
第 559 巻 1985 年 116-122

Dirac方程式とpath integral

北大理　一瀬 孝　(Takashi Ichinose)

1. Introduction.

Dirac方程式 ($c=\hbar=1$)

(1.1) $\partial_t \varphi(t,x) = [-\alpha(\partial - ieA(t,x)) - im\beta - ie\Phi(t,x)]\varphi(t,x)$

$(\partial = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$; $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, α_j, β は Dirac 行列$)$

の経路積分について heuristic に論じ, 時空2次元の場合に Cauchy問題の基本解及び遅延・前進 Green 関数の数学的厳密な経路積分 (path integral) 表示を与える. 本稿は, 主に田村博志氏との共著論文[9]に基き, 証明, 時空4次元の結果などの詳細はそれを参照されたい ([8]は要旨; cf. [6], [7]).

2. Heuristics.

(1.1) の Cauchy 問題の基本解を $K(t,x;0,y)$ とする. それは, 外電磁場中の量子化された粒子(質量m, 電荷e)が時刻0に位置yにあり時刻tに位置xにある確率振幅であり, 相空間経路積分[11]又は, ハミルトニアン経路積分[4]

(2.1) $$K(t,x;0,y) \sim \int_{\mathcal{P}_{t,x;0,y}} e^{iS(t;P,X)}\, \mathcal{D}(P)\, \mathcal{D}(X)$$

で与えられるとする。$S(t;P,X)$ は作用(action)と呼ばれ([10]),

(2.2) $S(t;P,X)=\int_0^t [P(s)\dot{X}(s) \mp \sqrt{(P(s)-eA(s,X(s)))^2+m^2} - e\Phi(t,X(s))]\,ds$

で与えられる。 $\mathcal{D}(P)\mathcal{D}(X)$ は 相空間経路空間 $\mathcal{P}_{t,x;0,y}=\{(P,X);$ $X(0)=y,\ X(t)=x,\ P(\cdot)$ unrestricted$\}$ 上の一様"測度"であり，形式的には，$\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3=\mathbb{R}^6$ 上の Lebesgue 測度 $dP(s)dX(s)$ の連続無限直積 $\prod_{s\in[0,t]}(2\pi)^{-3}dP(s)dX(s)$ と考える。次にこの相空間経路"積分"に於て

変数変換 $\begin{cases} X'(s)=X(s) \\ P'(s)=X(s)-eA(s,X(s)) \end{cases}$ $\left(\det\begin{bmatrix}\partial X(s)/\partial X'(s) & \partial X(s)/\partial P'(s) \\ \partial P(s)/\partial X'(s) & \partial P(s)/\partial P'(s)\end{bmatrix}=1 \text{ に注意}\right)$

を施し，更に Dirac の処方 $\pm\sqrt{P'(s)^2+m^2}\sim\alpha\cdot P'(s)+m\beta$

を用いると (P', X' を再び P, X と書く),

(2.3)
$$K(t,x;0,y)$$
$$=\int_{\mathcal{P}_{t,x;0,y}} Te^{i\int_0^t[(P(s)+eA(s,X(s)))\dot{X}(s)-(\alpha P(s)+m\beta)-e\Phi(s,X(s))]ds}\prod_{0<s<t}\frac{dP(s)dX(s)}{(2\pi)^3}$$

となる。 Dirac の処方の導入は，scalar を matrix で置きかえることになるので time ordering symbol T のそう入が必要になり，$Te^{i\int_0^t[\cdots]ds}$ は，product integral である。 更に，(2.3) の右辺を，$[0,t]$ を n 等分 ($0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t,\ t_j-t_{j-1}=t/n$; $x_j=X(t_j),\ p_j=P(t_j),\ x_n=x,\ x_0=y$) して，

(2.4)
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}\overbrace{\int_{\mathbb{R}^6}\cdots\int_{\mathbb{R}^6}}^{n-1}\prod_{j=1}^{n}\exp\left\{i\left[\left(p_{j-1}+eA(t_{j-1},x_{j-1})\right)\frac{x_j-x_{j-1}}{t_j-t_{j-1}}-\alpha(p_{j-1}+m\beta)-e\Phi(t_{j-1},x_{j-1})\right](t_j-t_{j-1})\right\}$$
$$\times\frac{dp_0}{(2\pi)^3}\frac{dp_1dx_1}{(2\pi)^3}\cdots\frac{dp_{n-1}dx_{n-1}}{(2\pi)^3}$$

と解釈しよう. (2.4)の被積分関数を

$$\prod_{j=1}^{n} e^{ix_j p_{j-1}} e^{-i(\alpha p_{j-1}+m\beta)(t_j-t_{j-1})} e^{-ix_{j-1}p_{j-1}} \cdot e^{i\sum_{k=1}^{n}[e\Phi(t_{k-1},x_{k-1})(t_k-t_{k-1})+eA(t_{k-1},x_{k-1})(x_k-x_{k-1})]}$$

と書き直し, nケの p_j 積分を実行すると, (2.4)は,

$$(2.5)\quad \lim_{n\to\infty}\overbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\cdots\int_{\mathbb{R}^3}}^{n-1} K_0(t_n-t_{n-1},x_n-x_{n-1})\cdots K_0(t_1-t_0,x_1-x_0)\, e^{i\sum_{k=1}^{n}[\cdots]}\, dx_1\, dx_2\cdots dx_{n-1}$$

となる. $K_0(t,x)$は, 外電磁場のないDirac方程式のCauchy問題の基本解である. (2.5)は, $A\equiv 0$で, Φがtに依らなければ, Trotter積公式により, $\mathrm{kernel}[e^{-t[(\alpha\partial+im\beta)+ie\Phi]}](x,y)$ を意味していることにもなる.

ここでもし K_0達とLebesgue測度dx_j達との積の極限として, 経路の空間上の測度$\nu_{t,x;0,y}$が構成できるとすれば,

$$(2.6)\quad K(t,x;0,y)=\int_{\mathcal{X}_{t,x;0,y}} d\nu_{t,x;0,y}(X)\, e^{-i\int_0^t e\Phi(s,X(s))ds + i\int_0^t eA(s,X(s))dX(s)}$$

となるであろう. $\mathcal{X}_{t,x;0,y}$は, 時刻0にyを出発し時刻tにxに至る配位空間経路X達の空間である. 我々の結果(Theorem 1)は, 時空2次元のとき(2.6)を数学的rigorをもって実現するものである.

3. Theorems

3.1. 時空2次元Dirac方程式のCauchy問題の基本解

時空2次元Dirac方程式

(3.1) $\partial_t \varphi(t,x) = [-\alpha(\partial_x - ieA(t,x)) - im\beta - ie\Phi(t,x)]\varphi(t,x),\ t>0,\ x\in\mathbb{R},$

のCauchy 問題の基本解$K^I(t,x;0,y)$は，次のような経路積分表示ができる。 α, β は 2×2 Hermite 行列で $\alpha^2=\beta^2=1$, $\alpha\beta+\beta\alpha=0$ を満たす． A, Φ は，$\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$ 上の実数値L^∞_{loc}関数とする．

<u>Theorem 1</u>. $C([0,t];\mathbb{R})$ 上の $\mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R};M_2(\mathbb{C}))$ 値可算加法的測度 $\nu^I_{t;0}$ が一意に存在して，すべての $(f,g)\in\mathcal{S}(\mathbb{R};(\mathbb{C}^2)')\times\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C}^2)$ に対して

(3.2) $$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \overline{f(x)}K^I(t,x;0,y)g(y)\,dx\,dy$$
$$= \int_{C([0,t];\mathbb{R})} (f, d\nu^I_{t;0}(X)g)\, e^{-i\int_0^t e\Phi(s,X(s))ds + i\int_0^t eA(s,X(s))dX(s)}$$

が成立する． 測度$\nu^I_{t;0}$ の台は，

$$\mathrm{supp}\,\nu^I_{t;0} \subseteq \{X\in Lip([0,t];\mathbb{R});\ |\dot{X}(s)|\leq 1,\ a.e.\ s\ (X(s)-X(0)=s,\ 0\leq s\leq t,\ if\ m=0)\}$$

を満たす．

Remark 1. $\nu^I_{t;0}$ は，<u>conditional</u> path space measure と考えられる．

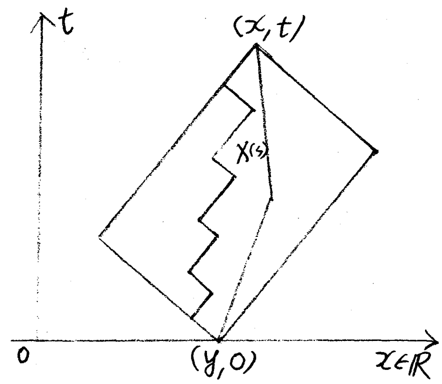
$$\nu^I_{t,f;0,g}(\cdot) \equiv (f, \nu^I_{t;0}(\cdot)\,g) = \langle \bar{f}\otimes g, \nu^I_{t;0}(\cdot)\rangle$$

は，$C([0,t];\mathbb{R})$ 上の複素数値可算加法的測度であるが，f, g

を形式的に $\delta_x=\delta(\cdot-x)$, $\delta_y=\delta(\cdot-y)$ と置いたものを $\nu^{I}_{t,x;0,y}$ と書くと, Theorem 1 は次のようになる:

$$(3.2)' \quad K^{I}(t,x;0,y)=\int_{X(0)=y,\,X(t)=x} d\nu^{I}_{t,x;0,y}(X)\, e^{-i\int_0^t e\Phi(s,X(s))ds+i\int_0^s eA(s,X(s))dX(s)}$$

$$\operatorname{supp}\nu^{I}_{t,x;0,y}\subseteq\left\{\begin{matrix}X\in Lip([0,t];\mathbb{R});\ |\dot X(s)|\le 1,\ a.e.\,s\ (X(s)-X(0)=s,\ 0\le s\le t,\ \text{if } m=0)\\ X(0)=y,\ X(t)=x\end{matrix}\right\}$$



Remark 2. 測度 $\nu^{I}_{t;0}$ の台に入っている典型的な path X達は zigzag path達であり, Zitterbewegung [1] を思い起させる.

Remark 3. Daletskii, Daletskii-Fomin [2] は関連する問題を扱ったが可算加法的測度を構成していない. Dirac 方程式の path integral について, 測度の構成を目差してはいないが, 興味あるいくつかの研究がある: [3], [12], [13], [5].

3.2. 時空2次元 Green 関数

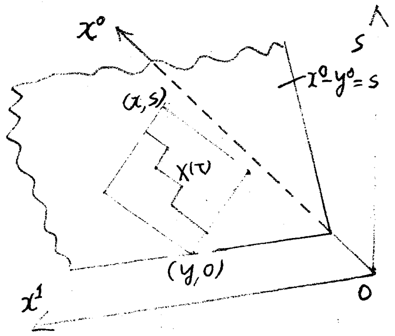
(3.1) に於て, $x^0=t$, $x^1=x$ と置き, 更めて $x=(x^0,x^1)\in\mathbb{R}^2$ と置く. 然る後右辺を左辺に移項して得られる作用素を

$$iH=(\partial_0+ieA_0(x))+\alpha(\partial_1+ieA_1(x))+im\beta$$

と置く. 但し, $A_0 = \Phi$, $A_1 = -A$. $\gamma^0 = \beta$, $\gamma^1 = \beta\alpha$ と置く.
Green 関数 $S(x,y;m)$ とは,

$$(3.3)\quad \gamma^0 H S(x,y;m) \equiv \Big[\sum_{\mu=0}^{1} \gamma^\mu(-i\partial_\mu + ieA_\mu(x)) + m\Big] S(x,y;m) = \delta(x-y), \quad x, y \in \mathbb{R}^2$$

の 2×2 行列値 distribution 解のことである. 色々の Green 関数があるが, 遅延 Green 関数 $S_{ret}(x,y;m)$, 前進 Green 関数 $S_{adv}(x,y;m)$ は次のような経路積分表示ができる. その定義は, それぞれ $[\mathrm{kernel}(\gamma^0 H - i\varepsilon\gamma^0)^{-1}](x,y)$, $[\mathrm{kernel}(\gamma^0 H + i\varepsilon\gamma^0)^{-1}](x,y)$ の $\varepsilon \downarrow 0$ の極限である. (3.2)′ のような直観的表現を行う.



<u>Theorem 2</u>. $C([0,s];\mathbb{R}^2)$ 上の $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2; M_2(\mathbb{C}))$ 値可算加法的測度 $\nu^{II}_{s,\cdot;0,\cdot}$ が一意に存在して, すべての $(f,g) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2;(\mathbb{C}^2)') \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$ に対して

$$(3.4)\quad S_{ret}(x,y;m) = i\int_0^\infty ds \int_{X(0)=y,\, X(s)=x} d\nu^{II}_{s,x;0,y}(X)\, \gamma^0 e^{-i\int_0^s \sum_{\mu=0}^{1} eA_\mu(X(\tau))\, dX^\mu(\tau)}$$

が成立する. 測度 $\nu^{II}_{s,\cdot;0,y}$ の台は,

$$\mathrm{supp}\,\nu^{II}_{s,x;0,y} \subseteq \left\{ \underset{(X^0,X^1)}{\overset{\shortparallel}{X}} \in \mathrm{Lip}([0,s];\mathbb{R}^2) ;\ \begin{array}{l} X^0(\tau) - X^0(0) = \tau,\ 0 \le \tau \le s \\ |\dot{X}^1(\tau)| \le 1 \text{ a.e. } \tau\ (X^1(\tau) - X^1(0) = \tau,\ 0 \le \tau \le s, \text{ if } m = 0) \\ X(0) = y,\ X(s) = x \end{array} \right\}$$

を満たす. $S_{adv}(x,y;m)$ については, $\int_0^\infty ds$ を $-\int_{-\infty}^0 ds$ で置き換えたものが成立する.

References

1. J.D.Bjorken and S.D.Drell, Relativistic Quantum Mechanics, (McGraw-Hill, New York, 1964), p.38.

2. Yu.L.Daletskii, Soviet Math. Dokl. 2, 1634-1637(1961); Uspehi Mat.Nauk. 17(5), 3-115(1962), English transl., Russ. Math. Surveys 17, 1-107 (1962). See also Yu.L.Daletskii and S.V.Fomin, Theory of Prob. Appl. 10, 304-316(1965).

3. R.P.Feynman and A.P.Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals (McGraw-Hill, New York, 1965), p.34-36.

4. C.Garrod, Hamiltonian path-integral methods, Rev. Mod. Phys. 38, 483-494(1966).

5. B.Gaveau, T.Jacobson, M.Kac and L.S.Schulman, Relativistic extension of the analogy between quantum mechanics and Brownian motion, Phys. Rev. Lett. 53, 419-422(1984).

6. T.Ichinose, 数理研講究録 464 (1982)

7. _________, Path integral for a hyperbolic system of the first order, Duke Math. J. 51, 1-36(1984).

8. _________, In:Proc. VIIth International Congress on Mathematical Physics (MΠΦ), Boulder, Aug. 1983, Physica 124A(1984).

9. _________ and H.Tamura, Propagation of a Dirac particle. A path integral approach, J. Math. Phys. 25(6), 1810-1819(1984).

10. L.D.Landau and E.M.Lifschitz, Course of Theoretical Physics, Vol. 2, The Classical Theory of Fields, 4th revised English ed. (Pergamon Press, Oxford, 1975).

11. M.M.Mizrahi, Phase space path integrals, without limiting procedure, J. Math. Phys. 19, 298-307(1978); Erratum, ibid. 21, 1965 (1980).

12. G.V.Riazanov, The Feynman path integral for the Dirac equation, Soviet Phys. JETP 6(33), 1107-1113(1958).

13. G.Rosen, Formulations of Classical and Quantum Dynamical Theory(Academic Preee, New York, 1969), Appendix E, p.118.