数理解析研究所講究録
第 563 巻 1985 年 84-90

3-Manifolds, Spines and Graphs

相模工大　津久井康之 (Yasuyuki Tsukui)

§0.　[1] では 3-manifold M の ball covering $\mathcal{B}(M) = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ から M の almost spine $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ を通して、その一部 $P_i = \mathcal{P}(\mathcal{B}|B_i)$ の singular locus を球面グラフとして考察した。そこでは P_i ($i=1,2,3,4$) 相互の matching が M を決定するとして、むしろ、各 P_i の性質の M への影響を調べた。しかし $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ の singular locus 全体が M を決定しているので、ここではこの視点からの中間報告をする。

§1.

Def. compact connected manifold M^3 に対して M 内の (closed) 3-balls B_i^3 の set $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \cdots, B_k\}$ は
(1) $\cup B_i = M$, (2) $B_i \cap B_j = \partial B_i \cap \partial B_j$ は 2-manifold (connected を要求しない)、

であるとき M の ball covering といい、M に対して k

の最小数をMのcovering numberと呼び$b(M)$と記す。

Def. connected closed 3-manifold Mは、
$M \not\cong M' \# (S^1 \times S^2)$ かつ $M \not\cong M' \# (S^1 \times_\tau S^2)$ のときにhandle freeと呼ばれる。

closed 3-manifold M^3については $2 \leqq b(M) \leqq 4$ で、$b(M^3)=2,3$ なるM^3の分類問題は解決している。$M^3 \not\cong S^3$ なるclosed handle free 3-manifold Mについては $b(M)=4$ である。以後handle free 3-manifoldについて考察をするが、表現の分りやすさのために $M \not\cong S^3$ の場合には、ball covering $\mathcal{B}=\mathcal{B}(M)=\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ について常に $B_i \cap B_j \neq \phi$ を仮定し、個々には明記しないこととする。

Prop. 1. $\mathcal{B}=\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ をhandle freeなM^3のball coveringとすると、$B_i \cap B_j$ は finite 2-disks $(i \neq j)$ である。

Def. $\mathcal{B}^3=\mathcal{B}$

$\mathcal{B}^2=\{D \mid B_i \cap B_j \supset D : \text{connected component} \quad i \neq j\}$

$\mathcal{B}^1=\{A \mid B_i \cap B_j \cap B_k \supset A : \text{connected component} \quad i<j<k\}$

$\mathcal{B}^0=\{p \mid B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \supset p \ \text{connected component}\}$

$\mathcal{B}^i$ はそれぞれ i-cellの集合でball, face(disk), edge, vertexと呼ばれる。

Prop. 2. ([1] Prop. 6)

$\mathcal{B}=\mathcal{B}(M)$ を handle free M^3 の ball covering で、

$\exists D, \exists D' \in \mathcal{B}^2(M)$ s.t. $D \cap D' \supset$ 2つ以上の components

$\Longrightarrow$

$\exists \mathcal{B}'=\mathcal{B}'(M)$: M の ball covering, $\#\mathcal{B}' < 4$ or $\#\mathcal{B}'^0 < \#\mathcal{B}^0$.

(注) [1] の Proposition 6 の 2) $<$ は $\leqq$ の誤記)

この Prop. 2. のくり返し適用により、handle free M^3 の ball covering $\mathcal{B}=\mathcal{B}(M)$ については、

$\forall D_i, \forall D_j \in \mathcal{B}^2$ $D_i \neq D_j$ に対して $D_i \cap D_j = \begin{cases} \emptyset & \text{or} \\ \text{an arc} \end{cases}$

としてよいから、

$\mathcal{B}^{(2)} = \mathcal{B}^0 \cup \mathcal{B}^1 \cup \mathcal{B}^2$ は cell complex とできる。

(このとき ball covering $\mathcal{B}$ を nice という)

§2.

Def. $\mathcal{B}$ を handle free M^3 の ball covering で上記の性質をもつものとする。

$$E_\ell = \{ e \in \mathcal{B}^1 : e \subset B_i \cap B_j \cap B_k,\ \{i,j,k,\ell\} = \{1,2,3,4\} \}$$

(E_ℓ は $\mathring{B}^3_\ell$ に含まれない $\mathcal{B}^1$ の元の set), $\ell = 1, 2, 3, 4$.

$$E = \mathcal{B}^1 = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$$

$$V = \mathcal{B}^0$$

Prop. 3. M^3 を handle free, $\mathcal{B}$ を M の nice な ball covering とすると $G=(V(\mathcal{B}), E(\mathcal{B}))$ は単純グラフである。

Def. グラフ $G=(V,E)$ が edge k-colourrable

$\Longleftrightarrow$ $\exists\, c: E \longrightarrow \{1,2,3,\ ,k\}$ (onto) map

such that $e, e' \in E$ e と e' が共通 vertex を持つならば $c(e) \neq c(e')$、

このとき $E_i = \{e \in E : c(e) = i\}$; E の colouring

$\overline{G}_i = (V, E - E_i)$

$\overline{G}_{ij} = (V, E - E_i - E_j)$

Prop. 4. $G=(V,E)$ を Prop 3 のグラフとする.

✲
(1) G は simple 4-regular (quartic), nonplaner.
(2) G は edge 4-colourrable、以下 1つの colouring について
(3) $\overline{G}_i$ は planer で S^2 への embedding は unique
(4) $\overline{G}_{ij} \cong \overline{G}_{kh}$, $\{i,j,k,h\} = \{1,2,3,4\}$

Prop. 5. handle free M^3 が orientable

$\Longleftrightarrow$

$G=(V,E)$ が bi-partite (2部グラフ).

§3.

Def. Prop. 4. の性質 $\ast$ を持つグラフ $G=(V,E)$ を Qpp. (Quartic partially planer) と呼ぶ。

ここまでで、handle free な M^3 の nice な ball covering から Qpp グラフが作られることをみた。また, nice でない ball covering を nice にする (Prop. 2) operations A と B は ball covering の ~~幾~~何的な reduction によってなされる [1]。ここではこの逆の問題について考える。

Prop. 5. $G=(V,E)$ を Qpp とし、$\{E_i\}$ をその1つの edge colouring とすると、closed 3-manifold M^3 とその nice な ball covering が存在して $G \cong G(\mathcal{B})$ 。

G に対して $\bar{G}_i$ を 3-ball B_i の境界 ∂B_i に置き、($i=1,2,3,4$) G による指定に沿って B_i's を貼り合せると M^3 を得る。ここでは M は一般に handle free かどうかは不明である。

Prop. 6. $\mathcal{B}_i$ を handle free M_i^3 の nice な ball covering とし $G_i = G(\mathcal{B}_i)$ を Qpp graph とする($i=1,2$).
$h: G_1 \cong G_2$ を edge-colouring を保存する同型写像と

すると $M_1 \cong M_2$ 。

Def. $h:(V_1,E_1)\to(V_2,E_2)$ が edge colouring を保存する $\Longleftrightarrow$ 「$e,e'\in E_1$, $c_1(e)=c_1(e')\to c_2h(e)=c_2h(e')$
但し $c_1:E_1\to\{1,2,\ldots,k\}$, $c_2:E_2\to\{1,2,\ldots,k\}$ は colouring.

§4.

$G=(V,E)$ を Qpp graph とする. E の全ての edge に向きを与えておく(任意)。 群の表示 $\pi_{(i)}$ を次のように定める.

$$\pi_{(i)}(G)=\langle E\ ;\ E_j, E_k, E_h, \overline{G_{ij}}, \overline{G_{ik}}, \overline{G_{ih}}\rangle$$

但し $\{i,j,k,h\}=\{1,2,3,4\}$.
$i=1,2,3,4$.

ここで $\overline{G_{ij}}=\{C_{ij}^1, C_{ij}^2,\ldots, C_{ij}^m\}$ は cycle の set で, 各 cycle C_{ij}^l について任意の1つの向きに向きづけられた E の元を読んで得られる words を表わす。

Prop. 7. $\pi_1(M)\cong\pi(G(\beta(M)))$ (全ての $\pi_{(i)}$ は同型)

注) 1. 略して $\pi_{(i)}(G)=\langle E_i\ ;\ \overline{G_{ij}}, \overline{G_{ik}}, \overline{G_{ih}}\rangle$ としてもよい。
2. $|E_i|=\frac{1}{4}|E|=\frac{1}{2}|V|$ で各表示とも生成元の個数は同じ.
3. relater の個数は余分なものがある。

§5.

予想1. Qpp graph の edge colouring は unique.

すなわち、Qpp graph の全ての同型は colouring 保存.

予想2. S^3 を represent する Qpp graph はない。

すなわち、S^3 の ball covering は全て幾何的に reduce する。

予想3. Qpp が bi-partite (M が orientable) ならばそれが表現する M^3 は handle free.

注意　handle free M^3 に対してその Qpp graph G は、$|G|$ が ball covering $\mathcal{B}$ を almost spine ($\cup \partial B_i$) と見たときの singular locus 全体であるから、M^3 に embed されていると考えてよい。 G 全体はもちろん M で compressible でないが G_i は全て M で contract する。

参考文献

[1] 津久井康之, 3-Manifold の Normal spine と Ball covering, 数理解析研究所講究録 524 "多様体と Fake Surfaces" (1984) 9-20.