数理解析研究所講究録
第 564 巻 1985 年 222-235

待ち行列過程の
時間的可逆性について

電通大・統計数学教室　大澤秀雄（Hideo Ōsawa）

0．はじめに

マルコフ過程の時間的可逆性（time-reversibility）の研究は、離散状態空間をもつ場合について、その応用とともに行われてきた。

KELLY (1979) は確率的現象、特に待ち行列に伴うマルコフモデルの可逆性について広く論じている。中でも、この本に展開されている擬可逆性（quasi-reversibility）はネットワーク型待ち行列の解析ともからんで、その後も様々な研究がなされてきた。

KEILSON (1979) は可逆な推移率をもつマルコフ過程について、可逆性に特有な対称行列の固有値（すべて実数）を用い、その過渡現象解の推移のスペクトル表現を論じた。この場合、固有値を求める何らかの方法、アルゴリズムに関する研究が進めば待ち行列系への応用も広がるだろう。

ŌSAWA (1985) は一般の可測空間を状態とするマルコフ連鎖（離散時マルコフ過程）の可逆性について調べた。特に storage モデルによく出現するアトムをもつ連鎖の可逆性について興味ある結果を導いた。

本論では、まず ŌSAWA (1985) に基づいて議論を進める。定理の詳しい証明等は、論文を参照されたい。次に離散状態をもつマルコフ連鎖に対し、可逆性をわずかに緩めた部分的可逆性（partial reversibility）を導入し、その定常分布について論じる。

1．マルコフ連鎖の時間的可逆性

$\{X_n ; n \in Z\}$ は可測空間 $(S, \mathcal{S})$ を状態空間とし、推移確率 $P(x, A)$ をもつマルコフ連鎖とする。 ここで Z は整数全体からなる集合である。

定義 $\{X_n\}$ が時間的可逆 (time-reversible) であるとは、

任意の $m, n \in Z$ および $A, B \in \mathcal{S}$ に対して

$$(1.1) \qquad P[X_m \in A, X_n \in B] = P[X_n \in A, X_m \in B]$$

を満たすことである。

いま、$\{X_n\}$ が定常であるとすれば、$\pi(\cdot)$ をその定常分布として (1.1) は

$$\int_A \pi(dx) P(x, B) = \int_B \pi(dx) P(x, A)$$

と表されるが、このような有界測度が存在することが可逆であるための条件であることがわかる。そのことをみるために、次の記号を導入しよう。

$\mathcal{B}(S)$ を S で定義された有界で $\mathcal{S}$－可測な実数値函数全体からなる集合とし、ν を $(S, \mathcal{S})$ 上の有界測度とするとき、$f \in \mathcal{B}(S)$ に対して

$$\nu f = \int_S \nu(dx) f(x)$$

$$P f(x) = \int_S P(x, dy) f(y)$$

と記す。このとき、次の定理が成り立つ。

定理１－１ 定常なマルコフ連鎖 $\{X_n\}$ に対して、次の３つの条件は同値である。

(i) $\{X_n\}$ は可逆である。

(ii) 任意の $A, B \in \mathcal{S}$ に対して

$$(1.2) \qquad \nu(1_A P 1_B) = \nu(1_B P 1_A)$$

なる $(S, \mathcal{S})$ 上の有界測度 ν が存在する。ここで、1_A はAの指示函数である。

(iii)　任意の $f_1, f_2 \in \mathcal{B}(S)$ に対して

(1.3)　$$\nu(f_1 P f_2) = \nu(f_2 P f_1)$$

なる $(S, \mathcal{S})$ 上の有界測度 ν が存在する。

また、このとき ν は $\{X_n\}$ の不変測度である。

1°　Sが離散状態空間であるとき、上の定理は周知の

すべての $i, j \in S$ に対して

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$$

となる確率分布 $\{\pi_i\}$ が存在する。

という条件と一致する。ここで $p_{ij} = P[X_{n+1} = j \mid X_n = i]$ とする。

2°　$P(x,\cdot)$ が絶対連続で密度 $p(x,y)$ をもつときは次の様になる。

すべての $x, y \in S$ に対して

$$p(x)p(x,y) = p(y)p(y,x)$$

となる確率密度 $p(x)$ が存在する。

2．アトムをもつマルコフ連鎖の可逆性

待ち時間をはじめとして多くの storage モデルでは、一点のみでアトムをなす状態をもつ場合がある。次にそのような、マルコフ連鎖の可逆性について考えてみよう。

マルコフ連鎖 $\{X_n\}$ が $\delta \in S$ においてアトムをなし、

(A1)　任意の $x \in S_\delta$ $(= S - \{\delta\})$ に対し、$P(x, \{\delta\}) > 0$,

(A2)　$$\int_{S_\delta} P(\delta, dx) / P(x, \{\delta\}) < \infty$$

を満たすとき、定理1-1 を用いて次を得る。

定理2－1　上の (A1,2) を満たす定常なマルコフ連鎖が可逆であるための必要十分条件は

任意の f_1, $f_2 \in \mathcal{B}(S)$ に対し

$$P(f_1 P(f_2 P 1_\delta))(\delta) = P(f_2 P(f_1 P 1_\delta))(\delta) \tag{2.1}$$

を満たすことである。ここに $1_\delta(x) = 1$ ($x=\delta$) $:= 0$ (その他)。

系 2－2　このとき、$\{X_n\}$ の定常分布 π は

$$\pi(A) = \pi_\delta \int_A P(\delta, dx) / P(x, \{\delta\}) \qquad A \in \mathcal{S},$$

$$\pi_\delta = \pi(\{\delta\}) = \left\{ \int_S P(\delta, dx) / P(x, \{\delta\}) \right\}^{-1}$$

で与えられる。ただし $P(\delta, dx)/P(x,\{\delta\}) = 1$ ($x=\delta$) とする。

3° $P(x, \cdot)$ が各 x に対し、S_δ 上で密度 $p(x,y)$ をもつとき、(2.1) は

$$p(\delta, x)\, p(x,y) P(y, \{\delta\}) = p(\delta, y)\, p(y,x) P(x, \{\delta\}) \qquad x, y \in S_\delta \tag{2.2}$$

となる。 storage モデルに対しては、この判定条件が使いやすい。

4° 仮定 (A1) がない場合(2.1) は、任意の f_1, f_2, …, $f_n \in \mathcal{B}(S)$ に対し

$$P(f_1 P(f_2 \cdots P(f_n P 1_\delta)\cdots))(\delta)$$

$$= P(f_n P(f_{n-1} \cdots P(f_1 P 1_\delta)\cdots))(\delta)$$

と変わる。 (2.2)も $\delta \to x_1 \to \cdots \to x_n \to \delta$ を任意の到達可能な路として、

$$p(\delta, x_1) p(x_1, x_2) \cdots P(x_n, \{\delta\})$$

$$= p(\delta, x_n) p(x_n, x_{n-1}) \cdots P(x_1, \{\delta\})$$

になる。

3．GI／G／1の待ち時間の可逆性

単一サーバ待ち行列の実待ち時間 $\{W_n\}$ は $\{U_n\}$ を独立な確率変数の列とし

$$W_{n+1} = \max(0,\ W_n + U_n)$$

という Lindley過程として表される。このマルコフ連鎖では、状態 0 においてアトムをなしているが、ここで $\{W_n\}$ の可逆性について調べよう。

U_n は分布 $K(x)$ に従うものとし、$K(x)$ について次の仮定を設ける。

(B1) $K(x)$ は連続な密度 $k(x) > 0$ をもつ ,

(B2) $\int_0^\infty dK(x) / K(-x) < \infty$,

(B3) $\int_{-\infty}^\infty x\, dK(x) < 0$.

推移確率は次で与えられる。

$$(3.1)\qquad \begin{aligned} \text{p.d.f. } p(x,y) &= k(y-x) \\ P(x, \{0\}) &= K(-x) \end{aligned} \qquad x \geq 0,\ y > 0 .$$

このとき、定理２－１の応用として次の結果を得る。

定理３－１ $\{W_n\}$ が定常であるとき、これが可逆であるための必要十分条件は $K(x)$ が両側指数分布であることである。

この定理の証明は、(3.1)を (2.1)にあてはめて

$$k(x)k(y-x)K(-y) = k(y)k(x-y)K(-x) \qquad x, y > 0$$

を満たす連続な $k(x)$ を見い出せばよい。結局、可逆である場合の $k(x)$ は次の形に限られる。

$$(3.2)\qquad k(x) = \begin{cases} c\,e^{-bx} & x \geq 0 \\ c\,e^{ax} & x < 0 \end{cases}$$

ここで　$c = ab / (a+b)$　, $b > a$　は正の定数である。

次に　S_n をn番目の客のサービス時間、　T_n を　n番目および（n＋1）番目の客の到着時間間隔として、　T_n がパラメータλの指数分布、すなわち　M／G／1　待ち行列の場合について考えてみる。　待ち時間過程　$\{W_n\}$ が可逆のとき、(3.2) により

$U_n = S_n - T_n$　の特性函数　$\phi_U(t)$ は

$$\phi_U(t) = ab / \{(b-it)(a+it)\}$$

である（i は虚数単位）から、S_n の特性函数　$\phi_S(t)$ は

$$\phi_S(t) = ab(\lambda+it) / \{\lambda(b-it)(a+it)\}.$$

このような特性函数をもつ非負確率変数は指数分布に限られることが、 Poisson　積分を計算することによりわかる（ŌSAWA (1985): Lemma5.2 参照)。 ＧＩ／Ｍ／１についても同じ事がいえる。以上により、

定理３－２　　Ｍ／Ｇ／１　および　ＧＩ／Ｍ／１　待ち行列の待ち時間過程において、それが可逆であるのは　Ｍ／Ｍ／１　に限る。

5°　S_n および　T_n が同一の位置パラメータをもつ指数分布のときでも　U_n　は両側指数分布となる。　したがって上の定理は　ＧＩ／Ｇ／１　について成り立つとはいえないが、これ以外にはありえないと思われる。

6°　離散状態をとる　Lindley 過程に関しても定理 3-1　と同様の結果が得られる。実際、両側指数を両側幾何とよみ換えればよい。同じことは定理3-2 についてもいえる。即ち、離散時型待ち行列　Ｍ／Ｇ／１　および　ＧＩ／Ｇ／１　においてその待ち時間過程が可逆になるのは　Ｍ／Ｍ／１　だけである。さらに、5°についても同じことがいえる。

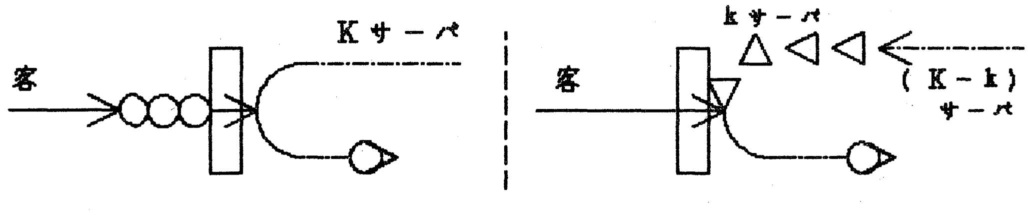
4. 可逆な待ち行列の例

双方向型待ち行列（a double-ended queue）を考える。系への客の到着は、パラメータλのポアソン過程であるとし、K人のサーバもひとりごとにパラメータμのポアソン到着をする。 系で待っている先頭の客は、サーバの到着時に、そのサーバと共に系を去る。サービスの規律は先着順であるとして、 ある客が到着してからサーバに巡り会って系を退去するまでの時間をその客の待ち時間とする。時刻 t における客の仮待ち時間を W_t，系でのサーバの待ち人数を N_t で表し、過程 $X_t=(W_t, N_t)$ について考えてみよう。$\{X_t\}$ の状態空間は

$$\{(x,0): x>0\} \cup \{(0,k): k=0,1,\cdots,K\}$$

であるが、ここで $(x,0)$ を x，$(0,k)$ を $-k$ で表すことにする。

X_t のジャンプの起る時点列 $\{t_n\}$ の直前の状態を示す隠れマルコフ連鎖 $\{X_n\}$, $X_n = X_{t_n-}$, を考える。



a. 客が待ちの状態　　b. サーバが待ちの状態

図. 1　双方向型待ち行列

定常分布の存在を保証するために $\lambda/(\mu K) < 1$ とする。このとき $\{X_n\}$ の推移確率は

$$p(x,y) = \begin{cases} \lambda C_0 \exp\{-\mu K(y-x)\} & y \geqq x > 0 \\ \lambda C_0 \exp\{-\lambda(x-y)\} & x \geqq y > 0 \end{cases}$$

$$P(x,\{0\}) = C_0 \exp(-\lambda x) \qquad x > 0$$

$$P(0,\{0\}) = \lambda C_0 / (\lambda + \mu K)$$

$$p(0,x) = \lambda^2 C_0 \exp(-\mu K x)/(\lambda + \mu K) \qquad x > 0$$

$$P(0,\{-1\}) = C_0$$

$$\left.\begin{aligned} P(-k,\{-k-1\}) &= C_k \\ P(-k,\{-k+1\}) &= \lambda/\{\lambda + \mu(K-k)\} \end{aligned}\right. \qquad k=1,2,\cdots,K$$

ここで、 $C_k = \mu(K-k)/\{\lambda + \mu(K-k)\},\ k \geqq 0$ ， とする。

これらが可逆性の条件 (2.2) , (2.3) を満足することは、容易に確かめられる。従ってその定常分布も次のように直ちに得ることができる。

$$p(x) = \lambda^2 \pi_0 \exp\{-(\mu K - \lambda)x\}/(\lambda + \mu K) \qquad x > 0$$

$$\pi_{-k} = \frac{\lambda + \mu(K-k)}{\lambda + \mu K} \cdot \frac{K!}{(K-k)!} \cdot \left[\frac{\lambda}{\mu}\right]^{-k} \pi_0$$

$$k = 1, 2, \cdots, K .$$

5. 部分的可逆性（p－可逆性）

$\{X_n ; n \in Z\}$ は可算状態空間 S，推移確率 $P=(p_{jk})$ をもつエルゴディックなマルコフ連鎖とする。可逆性の条件は非常にきついものであり、その適用できる範囲は残念ながら広いものとはいえない。そこで、この可逆性の条件を少し緩めた概念を $\{X_n\}$ に対し導入する。

定義　$\{X_n\}$ が次のような S の部分集合 S_1，S_2 をもつとき、$\{X_n\}$ は部分的に可逆 (partially reversible) であるという。

(C1)　$S = S_1 \cup S_2$

(C2)　状態 j，k が共に S_1（または共に S_2）に属すならば

$$u_j \, p_{jk} = u_k \, p_{kj}$$

となるベクトル $\underline{u}=(u_j)$，$u_j > 0$，が存在する。

部分的可逆をp－可逆と略す。

7° p－可逆の簡単な例をみてみよう。次の推移図で与えられるマルコフ連鎖は、状態 0，3 および 1，3 の間が一方通行であり可逆にはなり得ない。 そこで S を $S_1=\{0, 1, 2\}$ と $S_2=\{2, 3\}$ に分ければ、各部分集合で可逆なベクトル $\underline{u}=(qr(1-s), pr(1-s), q(1-p)(1-s), q(1-p)(1-r))$ がとれる。

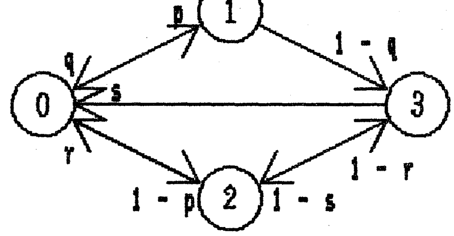


図.2　p－可逆の簡単な例

$\{X_n\}$ が p－可逆であるとき、その定常分布について考察する。 まず、次のようなベクトル $\underline{\beta}$ を定義する。

$$\beta_j = -u_j + \Sigma_{k\in S} u_k p_{kj} \qquad j\in S \quad .$$

$\underline{\beta}$ の成分は $j\in S_m$, m=1,2 , のとき

$$\beta_j = -u_j + (\Sigma_{k\in Sm} + \Sigma_{k\notin Sm}) u_k p_{kj}$$

$$= -u_j + \Sigma_{k\in Sm} u_j p_{jk} + \Sigma_{k\notin Sm} u_k p_{kj}$$

$$= -u_j P(j, S_m^c) + \Sigma_{k\notin Sm} u_k p_{kj}$$

となり、状態 j から S_m の外に流れ出る量を負に、逆に S_m の外から j に入ってくる量を正にとって加えたようなものにあたる。特に $j\in S_1\cap S_2$ ならば

$$\beta_j = 0 \quad .$$

また、ベクトルで表現すれば

$$\underline{\beta} = -\underline{u} + \underline{u}P$$

であるから次のことが得られる。

定理５－１ $\underline{\alpha}$ を方程式

$$\underline{\alpha} = \underline{\alpha}P + \underline{\beta} \tag{5.1}$$

の解とするとき、 $\underline{\alpha}+\underline{u}$ は $\{X_n\}$ の不変ベクトルである。

これから $\underline{\alpha}$ を求めることが問題になるが P は確率行列であり一意に決めることは出来ない。が、 S_1 , S_2 に共通な元があるとき、次のように求め得る。

いま $\delta\in S_1\cap S_2$ として、便宜上 δ に関する行と列をそれぞれ１行目、１列目におくこととし、

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} p_\delta & \underline{s} \\ \underline{r} & P_\delta \end{pmatrix}, \qquad \underline{\beta}=(0, \beta_\delta)$$

とする。このとき、方程式

(5.2) $\underline{\alpha}' = \underline{\alpha}' P_\delta + \underline{\beta}_\delta$

を考えれば $\underline{\alpha}=(0, \underline{\alpha}')$ に対し

$$\underline{\alpha} P = (\underline{\alpha}' \underline{r} , \underline{\alpha}' P_\delta).$$

ここで I を単位行列、また $\underline{1} = {}^t(1,1,\cdots)$ とおくと

$$\underline{r} = (I - P_\delta) \underline{1} , \underline{\beta}_\delta \underline{1} = 0$$

であることに留意して

$$\underline{\alpha}' \underline{r} = \underline{\alpha}'(I - P_\delta) \underline{1} = \underline{\beta}_\delta \underline{1} = 0 .$$

よって

$$\underline{\alpha} P + \underline{\beta} = (0 , \underline{\alpha}' P_\delta + \underline{\beta}_\delta) = \underline{\alpha} .$$

従って $(0 , \underline{\alpha}')$ は (5.1) の解である。 P_δ は劣確率行列なので、特に有限マルコフ連鎖に対しては、 $\underline{u}=(u_0 , \underline{u}')$ について $\underline{\alpha}'$ は一意に決定される。

結局 $(u_0 , \underline{\alpha}' + \underline{u}')$ は $\{ X_n \}$ の不変ベクトルである。

最後に p－可逆の例として、 M／M／2 を考える。

λ を客の到着率、 μ_A をサーバAのサービス率、 μ_B をサーバBのサービス率とし、さらに次のパラメータを用いる。

$$\mu = \mu_A + \mu_B$$

$$\rho = \lambda / \mu < 1 .$$

また、客の到着時において系が空のとき、その客は確率 p でサーバA、1-p でサーバB を各々選択する。

このモデルの系内人数過程に対し、 到着時および退去時点直後における隠れマルコフ連鎖 $\{X_n\}$ の推移図は次のように与えられる。

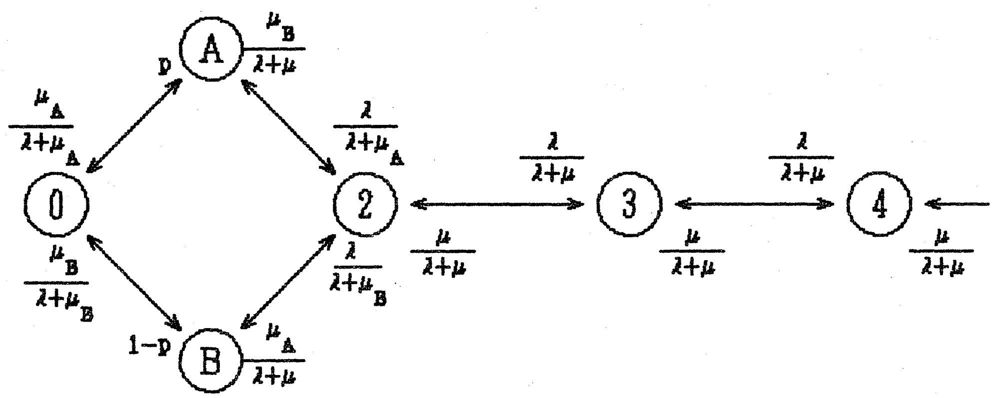


図.3　M／M／2の推移

ここで状態A（B）はサーバA（B）のみが、稼働中であることを表すものとする。このM／M／2については連続時のマルコフ過程として p=1/2 のときに限り可逆になることが KELLY の本で指摘されているが、$\{X_n\}$ についても同様のことが成り立つ。そこでいま S を

$$S_1 = \{\ 0,\ A,\ 2,\ \cdots\ \}$$

$$S_2 = \{\ B,\ 2,\ \cdots\ \}$$

という２つの部分に分けると

$$u_0 = \mu_A \mu_B$$

$$u_A = \mu_B (\lambda + \mu_A) p$$

$$u_B = \mu_A (\lambda + \mu_B) p$$

$$u_j = \lambda\ (\lambda+\mu)\ p\ \rho^{j-2} \qquad j = 2, 3, \cdots$$

を成分とするベクトル $\underline{u}$

$$\underline{u} = (u_0,\ u_A,\ u_B,\ u_2,\ \cdots)$$

をもつp－可逆な連鎖であることがわかる。 さらに S_1, S_2 に共通な元2を δ

とすればベクトル $\underline{\beta}_\delta$, 行列 P_δ は

$$\underline{\beta}_\delta = \mu_A \mu_B (2p-1)\ (1,\ 0,\ -1,\ \underline{0})$$

$$P_\delta = \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & p & 1-p & & & & \\ \mu_A/(\lambda+\mu_A) & 0 & 0 & & O & & \\ \mu_B/(\lambda+\mu_B) & 0 & 0 & & & & \\ & & & 0 & \mu/(\lambda+\mu) & & O \\ & O & & \mu/(\lambda+\mu) & 0 & * & \\ & & & O & * & \ddots & \ddots \end{array}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} U & O \\ O & V \end{bmatrix}$$

である。よって $\underline{\alpha}'$ は $(\underline{\alpha}_r,\ \underline{0})$ なる形で与えられる。

ここで、 $\underline{\alpha}_r$ は 3次のベクトルであって

$$\underline{\alpha}_r = \underline{\alpha}_r U + \underline{\beta}_r$$

ただし $\underline{\beta}_r = \mu_A \mu_B (2p-1)\ (1,\ 0,\ -1)$

という有限行列の計算により求まるものである。

これから定常分布は次の形で得られる。

$$\pi_A = \frac{(\lambda + p\mu)(\lambda + \mu_A)}{(2\lambda + \mu)\ \mu_B}\ \pi_0$$

$$\pi_B = \frac{\{\lambda + (1-p)\mu\}(\lambda + \mu_B)}{(2\lambda + \mu)\ \mu_A}\ \pi_0$$

$$\pi_j = \frac{\lambda\ \{\lambda + p\mu_B + (1-p)\ \mu_A\}\ (\lambda + \mu)}{(2\lambda + \mu)\ \mu_A\ \mu_B}\ \rho^{j-2}\ \pi_0$$

$$j = 2, 3, \cdots.$$

[文献]

KELLY, F, P. (1979) Reversibility and Stochastic Networks. Wiley.

KEILSON, J. (1979) Markov Chain Models: Rarity and Exponentiality. Springer Verlag.

ŌSAWA, H. (1985) Reversibility of Markov chains with applications to storage models. J. Appl. Prob. 22.