数理解析研究所講究録
第565巻 1985年 88-92

行列型作用素とベクトル値マーチンゲール

山形大 工　渡利 千波　Chinami Watari

離散時マーチンゲールに対して，Burkholder-Gundy [2] は行列型作用素を定義した．歴史的には，Fourier解析における Littlewood-Paley の理論の類似と見られる面もあり，作用素の補間定理が整備された現在では，その非線型性もあまり大きな不便ではないと見ることもできるが，ここでは一つの解釈による線型化の試みを述べ，関連する問題提起を行いたい。

1. 行列型作用素

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に σ-fields の増大列 $\{\mathcal{F}_n\}$ が与えられ，$\vee \mathcal{F}_n = \mathcal{F}$ がみたされているとする．マーチンゲール $\{f_n\}$: $f_n \in L^1$, $E[f_n | \mathcal{F}_{n-1}] = f_{n-1}$, $d_n = f_n - f_{n-1}$ に対して

$$Mf = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \limsup_{n\to\infty} \Big| \sum_{k=1}^{n} a_{jk} d_k \Big|^2 \Big)^{1/2}$$

a_{jk} は $\mathcal{F}_{k-1}$ 可測

$0 < c \leq \sum_j a_{jk}^2 \leq C < \infty$

を対応させる作用素が行列型作用素であるが，
周知のように，適当に時間停止を行えば，Mf を調べること

は　$M_n f = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, d_k\right|^2\right)^{1/2}$　を調べることに帰着される。また、これに関連して「極大型行列型作用素」とでもいうべき

$$M^* f = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sup_n \left|\sum_{k=1}^{n} a_{jk} d_k\right|^2\right)^{1/2}$$

が考えられ、諸種の評価が得られている。（本来は M^* は他の対象に使われた記号で、M^{***} と書くべきかもしれない。）（たとえば［2,3］を参照）

$f \longmapsto M_n f$,　　$f \longmapsto M^* f$　は、いずれも "sub-linear" であるが線形ではない。

2. Davis の不等式

離散時マーチンゲールに関する注目すべき結果の1つに、上記の Davis の不等式［4］がある。

$f^* = \sup_n |f_n|$,　　$S(f) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |d_j|^2\right)^{1/2}$　に対して

$$c\,\|f^*\|_1 \leqq \|S(f)\|_1 \leqq C\,\|f^*\|_1 \qquad (1)$$

$a_{jk} = 1 \quad (j=1)$　　$=0 \quad (j \geqq 2)$　とすれば $M^* f = f^*$ であり、

$a_{jk} = 1 \quad (j=k)$　　$=0 \quad (j \neq k)$　とすれば $M^* f = S(f)$

であるから、Davis の不等式は、行列型作用素の間の不等式の一例となっている。一般の行列型作用素の間には、Burkholder-Gundy-Davis の不等式［3］として知られている結果が成立するが、この結果は Izumisawa によっても独立

に証明されたものである。Davisの不等式との関連で述べると、2つの行列型作用素 $M_n f = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{jk} d_k\right|^2\right)^{1/2}$, $N_n f = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} b_{jk} a_k\right|\right)^2$ の間に

$$\| N^* f \|_1 \leqq C \sup_n \| M_n f \|_1$$

が成立する、という形になる。

3. ベクトル値マーチンゲール

$M_n f$ を、ℓ^2 のベクトル $\mathbb{M}_n f$ の ℓ^2-ノルムと見ようというものである。

$$\mathbb{M}_n f = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{1k} d_k, \ \sum_{k=1}^{n} a_{2k} d_k, \cdots\cdots \right)$$

がマーチンゲールであるとは、(現段階では)各成分ごとに条件付期待値をとるという意味で、$\| \mathbb{M}_n f \|_{\ell^2} \in L^1$ かつ

$$E[\, \mathbb{M}_n f \mid \mathfrak{F}_{n-1}] = \mathbb{M}_{n-1} f$$

の成立することをいう。マーチンゲール(ここではベクトル値)全体を $\mathbb{M}\mathbb{G}$、その階差列を $\mathbb{M}\mathbb{G}\mathbb{D}$ と書くことは許されよう。この記法を採用すると、

$$\mathbb{M}_n f = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} d_k \right)_j \in \mathbb{M}\mathbb{G}$$

$$\mathbb{M}_n f - \mathbb{M}_{n-1} f = (a_{jn} d_n)_j \in \mathbb{M}\mathbb{G}\mathbb{D}$$

となる。実数値マーチンゲールについては、類似の(細い字を用いる)記法は、すでにある程度標準的であると思われる。

さて、この立場に立ってDavisの不等式(1)を見直すと、記号的に

$$E[\,|\mathbb{M}G|_{\ell^\infty}] \sim E[\,|\mathbb{M}GD|_{\ell^2}] \qquad (1')$$

と読むことができるが、絶対値のかわりに（ベクトル値マーチンゲールの）ℓ^2 ノルムをとっても同様の結果が成立する。具体的には

$$E[\,|\,|\mathbb{M}G|_{\ell^\infty}|_{\ell^2}] \sim E[\,|\,|\mathbb{M}GD|_{\ell^2}|_{\ell^2}] \qquad (2)$$

である。実際

$$\mathbb{M}_n f = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, d_k\Big)_j$$

$$\mathbb{M}_n d = \mathbb{M}_n f - \mathbb{M}_{n-1} f = (a_{jn}\, d_n)_j$$

に対して、

$$|\mathbb{M}f|_{\ell^\infty} = \sup_n \Big|\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, d_k\Big|$$

$$|\,|\mathbb{M}f|_{\ell^\infty}|_{\ell^2} = M^* f$$

$$|\,|\mathbb{M}_n d\,|_{\ell^2}|_{\ell^2} = \Big(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{jn}\, d_n|^2\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \sum_{j=1}^{\infty} a_{jn}^2\Big)^{1/2}$$

$$\sim \text{const.}\cdot S(f)$$

であるから、(2) は Burkholder − Gundy − Davis (− Izumisawa) の不等式からわかる。

このような考え方は、("Real method" が整備される前に) Fourier 級数論に関連して登場した。Marcinkiewicz の補間定理がベクトル値関数に対しても適用できるようになった現在の目で、Boas − Bochner [1] あたりを見直してみることは、無駄ではないと考えられる。よりマーチンゲール

寄与には，Walsh Fourier 級数に関する Paley [5] がある。

実は，多時間系に対する条件つき期待値を，どのようにうまく定義すれば，本物のベクトル値マーチンゲールの名に値するものが得られるのか，問題である。ここで扱ったような，1つのスカラーマーチンゲールからの変換で得られるものについては，諸種の分解定理も利用できるし，好都合な部分だけをつまみ食いしたに留っている。

引用文献

[1] Boas, R. P. --- Bochner, S.
On a theorem of M. Riesz for Fourier series,
Journal of the London Math. Soc., 14(1939), 62 -- 73.

[2] Burkholder, D. L. --- Gundy, R.F.
Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on martingales, Acta Math. 124(1970), 250 -- 304.

[3] Burkholder, D. L. --- Gundy, R.F. --- Davis, B.
Integral inequalities for convex functions of operators on martingales,
Proc. Sixth Berkeley Symposium on Math. Statistics and Probability,
Univ. of Calif. Press, 2(1972), 223 -- 240.

[4] Davis, B.
On the integrability of martingale square function,
Israel Journal of Math., 8(1970), 187 -- 190.

[5] Paley, R. E. A. C.
A remarkable system of orthogonal functions,
Proc. London Math. Soc., (II) 34(1932), 241 -- 279.