数理解析研究所講究録
第565巻 1985年 93-113

BMOにおけるL^∞とH^∞

富山大・理 風巻 紀彦 (Norihiko Kazamaki)

1. 序。 L^∞は，有界なmartingales Mの全体を表し，H^∞を$\langle M\rangle_\infty$が有界であるmartingales Mの全体とする。いずれもBMOのsubclassである。§4に例証してあるように，両者の間に包含関係はない。最近，これらのクラスがどのような性格を有しているか興味を持って調べている。発端は，『weight $\hat{\sharp}$に関する(A_p)条件が成立する様子が，L^∞との距離又はH^∞との距離により左右されるのではないか，さらにその結果として，$\overline{L^\infty}$および$\overline{H^\infty}$を(A_p)条件によりcharacterizeできはしまいか』という漠然とした考えに取付かれたことにある。然し実解析の人達は，この問題に殆んど関心を示していない。それは，(A_p)条件とBMOの関係がmartingaleにおける程きれいに対応していないためと思われる。本稿では，こうした点にも少し触れながら，幾分古い話から始めることにする。

先ず，$0<w\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^1)$とする。これをweightに持つHardy-Littlewood型の不等式が成立するか否かの問題は，Muckenhoupt

が，その必要十分条件をあたえて解決した（[8]）。すなわち

$$(A_p) \qquad \sup_I \frac{1}{|I|}\int_I w(x)\,dx \left\{\frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right\}^{p-1} < \infty \qquad (1<p<\infty)$$

がそれである。ただし，Iは区間，|I|はIの長さとする。また，簡単のため，$(A_\infty) = \bigcup_{1<p<\infty}(A_p)$ とおくことにする。
Hunt-Muckenhoupt-Wheeden（[4]）は，これがHilbert変換に対する荷重ノルム不等式が成立するための必要十分条件でもあることを証明している。以下，wが(A_p)条件をみたすことを，$w \in A_p$ で表す。

<u>例1</u>　$|x| \in A_p \ (p>2)$。然し，$\frac{1}{|x|} \notin A_\infty$

ところで(A_p)条件とBMO-関数が関連することは，10年位前から知られている。すなわち

(a)　$w \in A_\infty \Longrightarrow \log w \in BMO$

(b)　$\log w \in BMO \Longrightarrow \exists\, \alpha > 0 : w(x)^\alpha \in A_\infty$

例1からも分るように，残念ながら(a)の逆は成立しない。従って，"$w \in A_\infty$" と "$\log w \in BMO$" がequiv.になってい

ない訳で，実解析の人達が上記の問題に興味を示さないのも肯ける。ところが，martingale の枠組の中では幸いなことに $\log w$ に代るものが存在し，それが BMO に属すことで $w \in A_\infty$ を characterize することが可能である。この事に関しては，§3 で述べる。

2. (A$_p$) 条件による $\overline{L^\infty}$ の特徴づけ。 Garnett-Jones の論文 [3] の中で，次の equiv. が implicitly に示されている：

$$w,\ w^{-1} \in \bigcap_{p>1} A_p \iff \log w \in \overline{L^\infty}$$

此処でこの結果を martingale の設定で解釈してみよう。先ず，確率系 $(\Omega, \mathcal{F}, P\ ; (\mathcal{F}_t))$ を用意し，そこで定義された positive stochastic proc. $X = (X_t, \mathcal{F}_t)$ について，その sample conti. を仮定しておく。このとき，Muckenhoupt の (A$_p$) 条件は，次の形に翻訳される。

定義 1　$1 < p < \infty$ に対し

$$\sup_t \| X_t\, E[X_\infty^{-\frac{1}{p-1}} \mid \mathcal{F}_t]^{p-1} \|_\infty < \infty$$

がなりたつとき，X は (A_p) 条件をみたすといい，これを $X \in A_p$ で表すことにする。さらに，$(A_\infty) = \bigcup_{p>1} (A_p)$ とする。

次に，M を unif. integ. conti. martingale とし

$$p(M) = \inf\{\, p > 1 : \left(E[e^{M_\infty} \mid \mathcal{F}_t] \right) \in A_p \,\}$$

とおく。一般に，$p(M) \neq p(-M)$ である。以下，簡単のため

$$p^*(M) = \max\{\, p(M),\ p(-M) \,\}$$

とおく。定義より勿論 $p^*(M) \geq 1$ である。

<u>Proposition 1</u> $\overline{L^\infty} = \{\, M : p^*(M) = 1 \,\}$

証明は，Garnett－Jones の考え方に忠実に従えばよい。

<u>Lemma 1</u> $1 < p < \infty$ とする。次の2条件は equiv. である。

(α_p) $\exists C_p > 0$: $E[\exp\{\frac{1}{p-1}|M_\infty - M_t|\} \mid \mathcal{F}_t] \leq C_p$

(β_p) $\exists C_p > 0$: $E[\exp\{\frac{1}{p-1}M_\infty\} \mid \mathcal{F}_t]\, E[\exp\{-\frac{1}{p-1}M_\infty\} \mid \mathcal{F}_t] \leq C_p$

証明 $(\alpha_p) \Longrightarrow (\beta_p)$:

$$E[\exp\{\tfrac{1}{p-1}M_\infty\} \mid \mathcal{F}_t]\, E[\exp\{-\tfrac{1}{p-1}M_\infty\} \mid \mathcal{F}_t]$$

$$= E[\exp\{\tfrac{1}{p-1}(M_\infty - M_t)\} \mid \mathcal{F}_t]\, E[\exp\{-\tfrac{1}{p-1}(M_\infty - M_t)\} \mid \mathcal{F}_t]$$

$$\leq E[\exp\{\tfrac{1}{p-1}|M_\infty - M_t|\} \mid \mathcal{F}_t]^2$$

$(\beta_p) \Longrightarrow (\alpha_p)$: Jensen's ineq. を用いれば

$$E[\exp\{\tfrac{1}{p-1}M_\infty\} \mid \mathcal{F}_t]\, E[\exp\{-\tfrac{1}{p-1}M_\infty\} \mid \mathcal{F}_t]$$

$$\geq \exp\{\tfrac{1}{p-1}M_t\}\, E[\exp\{-\tfrac{1}{p-1}M_\infty\} \mid \mathcal{F}_t]$$

$$\geq E[\exp\{-\tfrac{1}{p-1}(M_\infty - M_t)\} \mid \mathcal{F}_t]$$

同様にして

$$E[\exp\{\tfrac{1}{p-1}M_\infty\}\,|\,\mathcal{F}_t]\;E[\exp\{-\tfrac{1}{p-1}M_\infty\}\,|\,\mathcal{F}_t] \geqslant E[\exp\{\tfrac{1}{p-1}(M_\infty - M_t)\}\,|\,\mathcal{F}_t]$$

を得る。依って，(β_p) から (α_p) がある。 □

次に

$$a(M) = \sup\{a : \exists C_a > 0,\; E[\exp\{a|M_\infty - M_t|\}\,|\,\mathcal{F}_t] \leqslant C_a\}$$

とおく。

<u>Lemma 2</u>　$p^*(M) < \infty$ ならば，$p^*(M) \leqslant 2$，$M \in BMO$，$p^*(M) - 1 = \frac{1}{a(M)}$.

<u>証明</u>　$p^*(M) < \infty$ のとき，定義より

$$\exists p > 1 \;:\; (E[e^{M_\infty}\,|\,\mathcal{F}_t]),\; (E[e^{-M_\infty}\,|\,\mathcal{F}_t]) \in A_p$$

i.e.,

$$\exists C_p > 0 \;:\; E[e^{M_\infty}\,|\,\mathcal{F}_t]\,E[e^{-\frac{1}{p-1}M_\infty}\,|\,\mathcal{F}_t]^{p-1} \leqslant C_p$$

$$E[e^{-M_\infty}\,|\,\mathcal{F}_t]\,E[e^{\frac{1}{p-1}M_\infty}\,|\,\mathcal{F}_t]^{p-1} \leqslant C_p$$

ここで，$1 \leq E[e^{M_\infty}|\mathcal{F}_t]E[e^{-M_\infty}|\mathcal{F}_t]$ に注意すれば (β_p) がある。従って，補題1により (α_p) が成立する。このとき，(α_p) と不等式 $x \leq e^x$ を用いて

$$\frac{1}{p-1}E[|M_\infty - M_t|\,|\,\mathcal{F}_t] \leq C_p^{\frac{1}{p-1}}.$$

依って，$M \in BMO$。

次に，$\frac{1}{a(M)} \leq p^*(M)-1$ を示す。そのためには

(1) $$p > p^*(M) \Longrightarrow \frac{1}{a(M)} < p-1$$

を証明すれば済む。上の計算から，$p > p^*(M)$ ならば，(α_p) が成立するので，$a(M)$ の定義より，$\frac{1}{p-1} \leq a(M)$ i.e., $\frac{1}{a(M)} \leq p-1$ を得る。この結果は，$p > p' > p^*(M)$ なる p' に対してもなりたつから，実際は，$\frac{1}{a(M)} < p-1$ が得られたことになる。これの逆向きの証明は後回しにして，$p^*(M) \leq 2$ を示しておく。$p^*(M)$ が有限のとき

$$\exists p>1 : \left(E[e^{M_\infty}|\mathcal{F}_t]\right),\ \left(E[e^{-M_\infty}|\mathcal{F}_t]\right) \in A_p$$

$\left(E[e^{M_\infty}|\mathcal{F}_t]\right) \in A_p$ より，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ なる q に対し

$$E[e^{-\frac{1}{p-1}M_\infty} \mid \mathcal{F}_t]\; E[e^{\frac{1}{q-1}\frac{1}{p-1}M_\infty} \mid \mathcal{F}_t]^{q-1}$$

$$= E[e^{M_\infty} \mid \mathcal{F}_t]^{\frac{1}{p-1}}\; E[e^{-\frac{1}{p-1}M_\infty} \mid \mathcal{F}_t] \leq C_p$$

i.e.,

$$\left(E[e^{-\frac{1}{p-1}M_\infty} \mid \mathcal{F}_t] \right) \in A_q .$$

同様にして，$\left(E[e^{-M_\infty} \mid \mathcal{F}_t] \right) \in A_p$ から $\left(E[e^{\frac{1}{p-1}M_\infty} \mid \mathcal{F}_t] \right) \in A_q$ がある。従って，$q > p^*\left(\frac{M}{p-1}\right)$。このとき，(1) より，$\frac{1}{a\left(\frac{M}{p-1}\right)} < q-1$。ここで，$a\left(\frac{M}{p-1}\right) = (p-1)\,a(M)$ に注意すれば

$$\frac{1}{a(M)} < (p-1)(q-1) = 1 \qquad \text{i.e., } a(M) > 1 .$$

従って，(α_2) が成立。このとき，補題1より (β_2) がある。換言すれば，$\left(E[e^{M_\infty} \mid \mathcal{F}_t] \right)$ および $\left(E[e^{-M_\infty} \mid \mathcal{F}_t] \right)$ が (A_2) 条件をみたす。ゆえに，$p^*(M) \leq 2$。

最後に，$p^*(M) < \infty$ として，$p^*(M) - 1 \leq \frac{1}{a(M)}$ を示そう。そのためには，

$$\frac{1}{a(M)} < p-1 \Longrightarrow p^*(M) \leq p$$

を検証すればよい。$p^*(M) \leq 2$ であるから，$p \geq 2$ のときは明

らか。従って，$1<p<2$ の場合を処理すれば済む。$a(M)>\frac{1}{p-1}$ なる仮定から直ちに (α_p) と (β_p) がある。$\frac{1}{p-1}>1$ に注意すれば、

$$E[e^{M_\infty}\mid \mathcal{F}_t]^{\frac{1}{p-1}}E[e^{-\frac{1}{p-1}M_\infty}\mid \mathcal{F}_t]$$

$$\leq E[e^{\frac{1}{p-1}M_\infty}\mid \mathcal{F}_t]E[e^{-\frac{1}{p-1}M_\infty}\mid \mathcal{F}_t]\leq C_p$$

i.e.,

$$\left(E[e^{M_\infty}\mid \mathcal{F}_t]\right)\in A_p$$

同様にして，$\left(E[e^{-M_\infty}\mid \mathcal{F}_t]\right)\in A_p$ が求まる。従って $p^*(M)\leq p$。

□

次に $1\leq p<\infty$ に対し

$$\|M\|_{BMO_p}=\sup_t\left\| E[\,|M_\infty-M_t|^p\mid \mathcal{F}_t]^{1/p}\right\|_\infty$$

とおく。このとき，不等式

$$\exists C_p>0:\quad \|M\|_{BMO_1}\leq \|M\|_{BMO_p}\leq C_p\|M\|_{BMO_1}$$

の成立は良く知られている。

さらに $M, N \in BMO$ に対し, $d_p(M,N) = \|M-N\|_{BMO_p}$ とおく。

<u>Lemma 3</u> (Varopoulos [10], Emery [2])

$$\frac{1}{4\,d_1(M, L^\infty)} \leqq a(M) \leqq \frac{4}{d_1(M, L^\infty)}$$

<u>Prop. 1 の証明</u>. $p^*(M) < \infty$ のとき, 補題2より $p^*(M) - 1 = 1/a(M)$。さらに補題3を用いれば

(2) $$\frac{1}{4} d_1(M, L^\infty) \leqq p^*(M) - 1 \leqq 4\,d_1(M, L^\infty)\ 。$$

従って, 特に $p^*(M) = 1$ ならば $M \in \overline{L^\infty}$ となる。

逆に $M \in \overline{L^\infty}$ ならば, 補題3から $a(M) = \infty$。このとき, (α_2) が成立するから (β_2) も成立。つまり $p^*(M) \leqq 2 < \infty$。従って, (2) の右側不等式より $p^*(M) = 1$ が求まる。 □

3. <u>Exponential Martingale と BMO</u>。 $(\Omega, \mathcal{F}, P\,; (\mathcal{F}_t))$ を確率系とし, あたえられた weight 材 $0 < w \in L^1(\Omega)$ から

martingale $w_t = E[w \mid \mathcal{F}_t]$ を定める。測度の変換は，確率論においても重要な変換の一つであるが，$w\,dP$ もまた確率測度であるという制約が加わるため，必然的に $E[w]=1$ を仮定して論ずることになる。以下簡単のため $w_0 = 1$ とし，$(\mathcal{F}_t)$ が生みだす martingale の sample conti. を仮定して話を進めることにする。

確率積分の理論においては，weight martingale (w_t) が martingale $M_t = \int_0^t w_s^{-1} dw_s$ を用いて次のように表せることは良く知られた事柄である：

$$(3) \qquad w_t = \exp\left(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t\right)$$

ただし，$\langle M\rangle$ は，$M^2 - \langle M\rangle$ が martingale となる conti. increas. proc. である。このとき，§1 の (a), (b) と対称的に次の結果がなりたつ。

<u>Proposition 2</u> ([5]) 次の 3 条件は equiv. である。

(i) $M \in BMO$ (ii) $(w_t) \in A_\infty$ (iii) $\sup_t \left\| E\left[\log^+ \frac{w_t}{w_\infty} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]\right\|_\infty < \infty$

証明　(i) ⟹ (ii) : $\|M\|_{BMO_2} < \sqrt{2}(\sqrt{p}-1)$ なる p に対し，$(w_t) \in A_p$ を示す。先ず，実数 λ に対し

$$w_t^{(\lambda)} = \exp\left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2}\langle M\rangle_t\right)$$

もまた unif. integ. martingale をなすことに注意しておく。つまり，$E[w_\infty^{(\lambda)}/w_t^{(\lambda)} \mid \mathcal{F}_t] = 1$ である。次に，$r = \sqrt{p}+1$，$q = (\sqrt{p}+1)/\sqrt{p}$ とおくと，$\frac{1}{q(\sqrt{p}-1)^2} - \frac{r}{(p-1)^2} = \frac{1}{p-1}$ がなりたつから，Hölder's ineq. と John-Nirenberg's ineq. を用いれば

$$E\left[\left(\frac{w_t}{w_\infty}\right)^{\frac{1}{p-1}} \Big| \mathcal{F}_t\right] = E\left[\exp\left\{-\frac{1}{p-1}(M_\infty - M_t) - \frac{r}{2(p-1)^2}(\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_t)\right\}\right.$$

$$\left.\times \exp\left\{\frac{1}{2q(\sqrt{p}-1)^2}(\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_t)\right\} \Big| \mathcal{F}_t\right]$$

$$\leq E\left[\frac{w_\infty^{(\lambda)}}{w_t^{(\lambda)}} \Big| \mathcal{F}_t\right]^{1/r} E\left[\exp\left\{\frac{1}{2(\sqrt{p}-1)^2}(\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_t)\right\} \Big| \mathcal{F}_t\right]^{1/q}$$

$$\leq \left\{1 - \frac{1}{2(\sqrt{p}-1)^2}\|M\|_{BMO_2}^2\right\}^{1/q} . \qquad \left(\lambda \equiv -\frac{r}{p-1}\right)$$

従って，$(w_t) \in A_p$.

(ii) ⟹ (iii) : $(w_t) \in A_p$ $(p>1)$ のとき，

$$\exists C_p > 0 \;:\; \exp\left\{\frac{1}{p-1} E\left[\log^+ \frac{w_t}{w_\infty} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]\right\} \leq E\left[\left(\frac{w_t}{w_\infty}\right)^{\frac{1}{p-1}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] + 1 \leq C_p$$

従って, $E\left[\log^+ \frac{w_t}{w_\infty} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] \leq (p-1)\log C_p$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) : M が unif. integ. martingale の場合を処理すればよい。このとき

$$E\left[\log^+ \frac{w_t}{w_\infty} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] \geq E\left[M_t - M_\infty + \frac{1}{2}\left(\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_t\right) \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]$$

$$\geq \frac{1}{2} E\left[\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_t \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]$$

従って, (iii) から $\|M\|_{BMO_2} < \infty$ がある。 $\square$

因に, $M_\infty - \log w = \frac{1}{2}\langle M\rangle_\infty$ である。ここまでの話は, 先ず weight martingale (w_t) をあたえ, martingale M_t を定義して論じてきたが, 逆に $M \in BMO$ を任意にあたえて式 (3) により (w_t) を定義する場合にも全く同じ equiv. を得ることが出来る。そこで, いま $M \in BMO$ を任意にあたえたとき, これに対応する (w_t) がどの (A_p) 条件をみたすかを計るために

$$a(M) = \inf\{\, p > 1 \;:\; (w_t) \in A_p \,\}$$

とおく。Hölder's ineq. から簡単に，$p > a(M) \Longrightarrow (w_t) \in A_p$ がある。この逆もまた成立することが分る。
次に，$a^*(M) = \max\{ a(M), a(-M) \}$ とおく。このとき，[6] で指摘してあるように，

$$p > a^*(M) \Longrightarrow d_1(M, L^\infty) < 8(\sqrt{p} - 1)$$

がなりたつ。従って，$\{ M : a^*(M) = 1 \} \subset \overline{L^\infty}$ である。ところが，案に相違してこの逆が成立しない。そのことを次に例証しておく。

例 2　(B_t) を 1 次元の Brownian Motion $(B_0 = 0)$ とし，$M = B^\tau$ とおく。ただし，$\tau = \inf\{ t : |B_t| = 1 \}$。定義より $|M| \leq 1$ だから当然 $d_1(M, L^\infty) = 0$。他方

$$E\left[\left(\frac{w_t}{w_\infty} \right)^{\frac{1}{p-1}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \geq e^{-\frac{2}{p-1}} E\left[\exp\left\{ \frac{1}{2(p-1)} (\tau - t \wedge \tau) \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

しかも，$\alpha > \pi^2/8$ に対し $E[e^{\alpha\tau}] = \infty$ ([9] の Prop. 8.4) だから $1 < p < 1 + 4/\pi^2$ とすると $1/\{2(p-1)\} > \pi^2/8$ となり $(w_t) \notin A_p$。従って，$a^*(M) \geq 1 + 4/\pi^2$ となる。

4. H^∞ と (A_p) 条件。　§1 で述べたように H^∞ と L^∞ の間に包含関係がない。そのような例は簡単につくれる。実際に $(B_{t\wedge 1}) \in H^\infty \setminus L^\infty$ であり，例え例2の $M = B^\tau$ は有界ではあるが $d_2(M, H^\infty) \geq 2/\pi$ となってしまう。然しながら，一般に $H^\infty \subset \overline{L^\infty}$ がなりたつことが分る（[7]）。しかも Dellacherie-Meyer-Yor（[1]）により trivial case を除き，$\overline{L^\infty} \neq BMO$ であることが示されているので，H^∞ もまた BMO で稠密ではないことになる。

Proposition 3 （[7]）　$d_2(M, H^\infty) < \sqrt{p} - 1 \implies a^*(M) < p$

証明　先ず，

$$\beta(M) = \sup\left\{ b > 0 : \exists C_b > 0,\ E[\exp\{ b^2(\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_t)\} \mid \mathcal{F}_t] \leq C_b \right\}$$

とおき

(4)
$$\frac{1}{\sqrt{2}\, d_2(M, H^\infty)} \leq \beta(M)$$

を示す。　$0 < b < \dfrac{1}{\sqrt{2}\, d_2(M, H^\infty)}$ のとき

$$\exists N \in H^\infty : \quad b < \frac{1}{\sqrt{2}\, d_2(M, N)} \quad .$$

他方 $s<t$ に対し，$\langle M\rangle_t-\langle M\rangle_s \leqq 2\{(\langle M-N\rangle_t-\langle M-N\rangle_s)+(\langle N\rangle_t-\langle N\rangle_s)\}$
および $\langle N\rangle \leqq C$ に注意すれば

$$E[\exp\{b^2(\langle M\rangle_\infty-\langle M\rangle_t)\}\mid \mathcal{F}_t] \leqq E[\exp\{2b^2(\langle M-N\rangle_\infty-\langle M-N\rangle_t)+(\langle N\rangle_\infty-\langle N\rangle_t)\}\mid \mathcal{F}_t]$$

$$\leqq e^{2b^2C} E[\exp\{2b^2(\langle M-N\rangle_\infty-\langle M-N\rangle_t)\}\mid \mathcal{F}_t]$$

John-Nirenberg's ineq. より，右辺は $e^{2b^2C}\{1-2b^2\|M-N\|^2_{BMO_2}\}^{-1}$
より小である。従って，$b\leqq\beta(M)$ となり (4) を得る。

次に $d_2(M,H^\infty)<\sqrt{p}-1$ としよう。(4) から $\beta(M)>\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{p}-1)}$.
さらに Prop. 2 (i) $\Longrightarrow$ (ii) の証明のように，$r=\sqrt{p}+1$，$s=\frac{\sqrt{p}+1}{\sqrt{p}}$
とおいて Hölder's ineq. を用いると

$$E\left[\left(\frac{w_t}{w_\infty}\right)^{\frac{1}{p-1}}\Big|\ \mathcal{F}_t\right] \leqq E\left[\frac{w_\infty^{(\lambda)}}{w_t^{(\lambda)}}\Big|\ \mathcal{F}_t\right]^{1/r} E\left[\exp\left\{\frac{1}{2(\sqrt{p}-1)^2}(\langle M\rangle_\infty-\langle M\rangle_t)\right\}\Big|\ \mathcal{F}_t\right]^{1/s}$$

従って，$a(M)<p$。同様にして $a(-M)<p$ がある。ゆえに $a^*(M)<p$。□

<u>Corollary</u>. $\overline{H^\infty}\subset\{M : a^*(M)=1\}$.

$\overline{H^\infty} = \{ M : a^*(M) = 1 \}$ がなりたつか否かは，興味深い問題と思えるが，今のところ不明である。手掛りは，(4) の逆向き不等式

$$\exists C > 0 \quad ; \quad \beta(M) \leqslant \frac{C}{d_2(M, H^\infty)}$$

を得ることであるが，これも果してなりたつものやら皆目分らない。その他，H^∞ は BMO において多分 closed ではないだろうと考えているが，これも不明のままである。

ところで，$a(M) = a(-M)$ が一般になりたつだろうか？これは 7，8 年前から気になっていた問題で，最近になり漸く negative example が得られた。明らかになって見れば当り前みたいなものだが，概摺らされた分変着のようなものもあるので，それを次に紹介しておく。

例 3. (B_t) を確率系 $(\Omega, \mathcal{F}, Q ; (\mathcal{F}_t))$ 上の 1 次元 Brownian Motion で $Q(B_0 = 0) = 1$ とし

$$\tau = \inf\{ t : |B_t| = 1 \}$$

とおく。このとき $\{ \exp(B_{t\wedge\tau} - \frac{1}{2}(t\wedge\tau)), \mathcal{F}_t \}$ は，unif. integ.

martingale/Q である。従って，$dP \equiv \exp(B_\tau - \frac{1}{2}\tau)\,dQ$ は確率測度となる。次に，$M_t \equiv t\wedge\tau - B_{t\wedge\tau}$ とおくと，Girsanov の定理から，これは conti. martingale/P で $\langle M\rangle_t = t\wedge\tau$。$M$ に対応する weight martingale は，

$$w_t = \exp\left\{ (t\wedge\tau - B_{t\wedge\tau}) - \frac{1}{2}(t\wedge\tau) \right\} = \exp\left\{ \frac{1}{2}(t\wedge\tau) - B_{t\wedge\tau} \right\}$$

従って，任意の $1<p<\infty$ に対し

$$E\left[\left(\frac{w_t}{w_\infty}\right)^{\frac{1}{p-1}} \middle| \mathcal{F}_t\right] = E\left[\exp\left\{-\frac{1}{2(p-1)}(\tau - t\wedge\tau) + \frac{1}{p-1}(B_\tau - B_{t\wedge\tau})\right\} \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

$$\leq \exp\left\{\frac{2}{p-1}\right\} \qquad \therefore \quad a(M) = 1$$

他方 $1 < p < \dfrac{16+\pi^2}{4+\pi^2}$ のとき，$p<2$，$\dfrac{4-p}{2(p-1)} > \dfrac{\pi^2}{8}$ で，しかも

$$E\left[\left\{\frac{w_t^{(-1)}}{w_\infty^{(-1)}}\right\}^{\frac{1}{p-1}} \middle| \mathcal{F}_t\right] = E_Q\left[\frac{w_\infty}{w_t}\left\{\frac{w_t^{(-1)}}{w_\infty^{(-1)}}\right\}^{\frac{1}{p-1}} \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

$$= E_Q\left[\exp\left\{\frac{p-2}{p-1}(B_\tau - B_{t\wedge\tau}) + \frac{4-p}{2(p-1)}(\tau - t\wedge\tau)\right\} \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

$$\geq \exp\left\{-\frac{2(2-p)}{p-1}\right\} E_Q\left[\exp\left\{\frac{4-p}{2(p-1)}(\tau - t\wedge\tau)\right\} \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

従って，例2で述べたように $\mathrm{E}_Q[e^{\alpha\tau}]=\infty$ $(\alpha>\frac{\pi^2}{8})$ である事を考慮すれば，$w^{(-1)}\notin A_p$。つまり，$a(-M)\geqslant\frac{16+\pi^2}{4+\pi^2}>1$ となり $a(M)\neq a(-M)$ である。

注意　$D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ とし，$w(e^{i\theta})$ を ∂D 上の weight 関数とする。次に (Z_t) を complex Brownian motion，$Z_0=0$ とし

$$\tau=\inf\{t:|Z_t|=1\},\quad \mathcal{F}_t=\mathcal{G}(Z_{s\wedge\tau},s\leq t)$$

とおく。w から weight martingale $w_t=\mathrm{E}[w(Z_\tau)\,|\,\mathcal{F}_t]$ を定義する。(w_t) は w の Poisson 積分 $u(z)$ $(z\in D)$ により，$w_t\doteqdot u(Z_{t\wedge\tau})$ とかけるので，$M_t=\int_0^{t\wedge\tau}\frac{1}{u(Z_s)}\,d\,u(Z_s)$。Prop. 3 により，$d_2(M,H^\infty)<\sqrt{p}-1$ から $(w_t)\in A_p$ がある。他方，未発表ではあるが，martingale における (A_p) から classical (A_p) が出るという関口—塩田の結果があるので，結局 $d_2(M,H^\infty)<\sqrt{p}-1$ のとき，$w\in A_p$ が得られたことになる。

参考文献

[1] C. Dellacherie, P. A. Meyer and M. Yor, Sur certaines

propriétés des espaces de Banach H^1 et BMO, Sém. Prob. XII, Lecture Notes in Math. 649 (1978), 98–113.

[2] M. Emery, Le théorème de Garnett-Jones d'après Varopoulos, Sém. Prob. XV, Lecture Notes in Math. 850 (1981), 278–284

[3] J. B. Garnett and P. W. Jones, The distance in BMO to L^∞, Ann. Math. 108 (1978), 373–393.

[4] R. Hunt, B. Muckenhoupt and R. Wheeden, Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform, Trans. Amer. Math. Soc., 176 (1973), 227–251.

[5] N. Kazamaki, A characterization of BMO-martingales, Sém. Prob. X, Lecture Notes in Math. 511 (1976), 536–538.

[6] ————, Martingale における Garnett-Jones の定理 と (A_p) 条件, 数理解析研究所講究録 491 (1983), 158–170.

[7] N. Kazamaki and Y. Shiota, Remarks on the class of continuous martingales with bounded quadratic variation, Tôhoku Math. Journ., 37 (1985), 801–806.

[8] B. Muckenhoupt, Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, Trans. Amer. Math. Soc., 165 (1972), 207–226.

[9] S. C. Port and C. J. Stone, Brownian Motion and Classical Potential Theory, Academic Press 1978.

[10] N. Th. Varopoulos, A probabilistic proof of the Garnett-Jones theorem on BMO, Pacific J. Math., 90 (1980) 201 – 221.