数理解析研究所講究録
第565巻 1985年 114-121

螺旋の直交性と独立性

岩手大人文社会科　島野 岳（Takashi Shimano）

1. ここに言う螺旋とは，マルチンゲール理論の応用として保測変換の研究に導入された確率過程のことである。その対象とするものは，完備可分な確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の自己同型即ち可逆で保測である点変換で，次の性質をもつものである。変換Tに対し，$\mathcal{F}$ の完備真部分シグマ体 $\mathcal{F}_0$ が存在して　(a) $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$　(b) $\bigvee_{-\infty<n<\infty} \mathcal{F}_n = \mathcal{F}$　である。ここに $\mathcal{F}_n \equiv T^n \mathcal{F}_0$ とする。この性質をもつ変換は，保測変換全体の中でも重要なクラスであり，その混合性の研究では上述の $\mathcal{F}_0$ が中心的な役割を演ずるので，これを対 $(T, \mathcal{F}_0)$ として扱い，システムと呼んでいる。さて，ここに現われた部分シグマ体の両側列 $(\mathcal{F}_n)_{-\infty<n<\infty}$ は増加列であることから，これを記述するのにこれに適合する（2乗可積分）マルチンゲールを考える。大まかに言えば，このマルチンゲールがシステム $(T, \mathcal{F}_0)$ の螺旋と呼ばれる確率過程である。マルチ

ンゲールの場合と同様，螺旋全体の集合は $(\mathcal{F}_n)$ の増加の状態を記述していると考えられる。そこで我々は螺旋全体のつくる空間にある内積を定めて，螺旋の重複度即ちこの空間の直交基を調べ，それは $(\mathcal{F}_n)$ の増加の状態をどのように反映するかということを問題にする。システム $(T, \mathcal{F}_0)$ が，Bernoulli 型と呼ばれる場合には，この問題は極めて簡潔な解をもつが，本稿では，$(\mathcal{F}_n)$ がある正則条件の下にあれば，Bernoulli 型と同様の結果を導びけることを述べる。

2. 本節で，螺旋とその直交性及び重複度等の定義と既知の結果を揚げる。

$L^2_0(\Omega)$ を 2 乗可積分確率変数で期待値 0 なるもの全体のクラスとし，通常の内積で Hilbert 空間とみなす。$L^2_0(\mathcal{F}_n)$ を $\mathcal{F}_n$ 可測なるものからなる $L^2_0(\Omega)$ の部分空間とする。

<u>定義 1.（螺旋）</u>　$L^2_0(\Omega)$ の両側列 $X = (x_n)_{-\infty<n<\infty}$ がシステム $(T, \mathcal{F}_0)$ の螺旋であるとは，(a) $x_0 = 0$，(b) すべての n に対し $x_n - x_{n-1} \in L^2_0(\mathcal{F}_n) \cap L^2_0(\mathcal{F}_{n-1})^{\perp}$，(c) すべての n に対し $(x_n - x_{n-1})\circ T^{-1} = x_{n+1} - x_n$ をみたすことである。

この定義から $(x_{n+m} - x_m, \mathcal{F}_{n+m})_{n\geq 0}$ が 2 乗可積分マルチンゲールであることがわかり，マルチンゲール理論の手

法が摘用出来ることになる。

システム $(T, \mathfrak{F}_0)$ のふたつの螺旋 $X=(x_n)$ と $X'=(x_n')$ に対し，$\mathfrak{F}_0$ 可測である確率変数 $\langle X, X'\rangle$ を $\langle X, X'\rangle \equiv E[x_1 x_1' | \mathfrak{F}_0]$ によって定める。 $X=X'$ のときは簡単に $\langle X\rangle$ とかくことにする。

定義 2.（直交性） $\langle X, X'\rangle = 0$ であるとき，X と X' は直交するという。

定義 3.（螺旋測度） $\mathfrak{F}_0$ 上の測度 $\mu\langle X, X'\rangle$ を $d\mu\langle X, X'\rangle \equiv \langle X, X'\rangle dP$ で定め，X と X' の螺旋測度と呼ぶ。

定義 4.（螺旋変換） 螺旋 $X=(x_n)$ と $\nu \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}_0, \mu\langle X\rangle)$ に対して

$$y_0 = 0, \quad y_n = \sum_{k=1}^{n} (\nu \circ T^{-(k-1)})(x_k - x_{k-1}) \quad (n>0)$$
$$y_n = -y_{-n} \circ T^{-n} \quad (n<0)$$

で与えられる螺旋 $Y=(y_n)$ を X の ν による螺旋変換と呼び $\nu * X$ で表す。

これはマルチンゲール変換に類似して定められている。

以上の定義により螺旋全体のつくる空間に，内積 $\langle\ ,\ \rangle$（その値は $L^1(\mathfrak{F}_0)$ であるが）と，$*$ 乗法によって螺旋のスカラー倍が与えられた訳である。

次に，我々の議論の基礎となる結果を掲げる。

定理 A（螺旋の基） システム $(T, \mathfrak{F}_0)$ に対し，互いに直交する螺旋の高々可付番列 $\mathfrak{X} = (X^{(p)})$ が存在して次の条件

をみたす。

(a) 任意の螺旋 X に対し，列 $(\nu^{(p)})$ ，$\nu^{(p)} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mu\langle X^{(p)}\rangle)$ が定まって $X = \sum_p \nu^{(p)} * X^{(p)}$ とかける。

(b) すべての p について，$\mu\langle X^{(p)}\rangle \succ \mu\langle X^{(p+1)}\rangle$

更に，$\mathcal{Y} = (Y^{(p)})$ が同じく上の条件をみたすものならば すべての p について $\mu\langle Y^{(p)}\rangle \sim \mu\langle X^{(p)}\rangle$

このような螺旋の列はシステムの螺旋の基と呼ばれる。定理Aから基の長さは，システムに対し一意に決定することがわかる。

定義5.（螺旋の重複度） 基の長さはシステムの螺旋の重複度と呼ばれ，これを $M(T, \mathcal{F}_0)$ で表す。

螺旋の重複度については次のふたつの結果がある。

以後我々が扱うシステム $(T, \mathcal{F}_0)$ は，$\mathcal{F}_0$ がある部分シグマ体 $\mathcal{A}$ によって $\mathcal{F}_0 = \bigvee_{n<0} T^n\mathcal{A}$ と表されるものに制限することにする。

定理B（重複度の上界） システム $(T, \mathcal{F}_0)$ が上述のものであるならば，

$$M(T, \mathcal{F}_0) \leq \dim L_0^2(\mathcal{A})$$

である。ここに $L_0^2(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ 可測 あるものから成る $L_0^2(\Omega)$ の部分空間とする。

この定理の等式が成立するシステムとして次のものがある。

<u>定義 6.（Bernoulli システム）</u> 上述のシステムに於いて $(T^n A)_{-\infty<n<\infty}$ が部分シグマ体の独立列であるならば，システムは Bernoulli システムと呼ばれる。

<u>定理 C.（Bernoulli システムの螺旋の重複度）</u> $(T, \mathfrak{F}_0)$ が Bernoulli システムであるならば，その任意の螺旋の基 $\mathfrak{X}=(X^{(p)})$ に対して

$$\mu\langle X^{(p)}\rangle \sim P|\mathfrak{F}_0$$

であり，かつ

$$M(T, \mathfrak{F}_0) = \dim L_0^2(A) .$$

3. 本節では螺旋間にある独立性を定義し，螺旋についての Schmidt の直交化の手順を示し，それによって定理 C を拡張する結果を述べる。

<u>定義 7.（予見可能独立性）</u> 螺旋の列 $(X^{(p)})$ が予見可能独立であるとは，すべての p について $\nu^{(p)}=0$ であるときに限り $\langle \sum_p \nu^{(p)} * X^{(p)}\rangle = 0$ であることゝする。

予見可能独立列の任意の部分列もまた，予見可能独立となることに注意せよ。

<u>Schmidt の直交化</u>： 螺旋の列 $(X^{(p)})_{p=1,2,\cdots,\kappa}$ $(1\leqq \kappa \leqq \infty)$ は予見可能独立で更に各 p について $\langle X^{(p)}\rangle > 0$ a.s. であるとする。 そのとき

$$Y^{(1)} = X^{(1)}$$

$$Y^{(p)} = X^{(p)} - \sum_{q=1}^{p-1} \frac{\langle X^{(p)}, Y^{(q)} \rangle}{\langle Y^{(q)} \rangle} * Y^{(q)} \qquad (=2,\cdots,\kappa)$$

とおくと，$(Y^{(p)})_{p=1,2,\cdots,\kappa}$ は螺旋の直交列で

$$\mu\langle Y^{(p)} \rangle \sim P|\mathcal{F}_0$$

である。

<u>定理 1.</u> システム $(T,\mathcal{F}_0)$ は $\mathcal{F}_0 = \bigvee_{n<0} T^n\mathcal{A}$ であり $\dim L_0^2(\mathcal{A}) = \kappa$ なるものとする。このシステムに対し，予見可能独立で，更にすべての p について $\langle X^{(p)} \rangle > 0$ a.s. である螺旋の列 $(X^{(p)})_{p=1,2,\cdots,\kappa}$ が存在すれば，任意の螺旋の基 $\mathcal{Y} = (Y^{(p)})$ は

$$\mu\langle Y^{(p)} \rangle \sim P|\mathcal{F}_0$$

をみたし，かつ

$$M(T,\mathcal{F}_0) = \kappa$$

証明は，Schmidt の直交化と定理 B による。

最後に，定理 1 の条件をみたすシステムとして，Bernoulli システムではないが $(\mathcal{F}_n)$ の増加の状態がある正則性をもつシステムを掲げ，その螺旋の重複度を決定する。

今システム $(T,\mathcal{F}_0)$ $(\mathcal{F}_0 = \bigvee_{n<0} T^n\mathcal{A})$ に於いて，部分シグマ体 $\mathcal{A}$ は Ω の分割 $\alpha = \{A_0, A_1, \cdots, A_\kappa\}$ によって生成されているとする。このシステムに次の正則条件を課する。

<u>定義 8. (正則システム)</u> 上述のシステム $(T,\mathcal{F}_0)$ が正則で

あるとは，$\mathbb{P}(B)>0$ であるすべての $B\in\mathcal{F}_0$ とすべての $A_p\in\alpha$ に対し，$0<\mathbb{P}(A_p|B)<1$ であることである。ここに $\mathbb{P}(A|B)$ は条件Bの下でのAの条件付確率とする。

Bernoulli システムは明らかに正則である。この定義は，システムに独立性こそないものゝ，変換Tが Ω のあらゆる部分をある意味で均等に混合している状態を定めていると考えてよいであろう。

定理2. システム $(T,\mathcal{F}_0)$ が正則であるならば，その螺旋の任意の基 $\mathcal{Y}=(Y^{(p)})$ に対し

$$\mu\langle Y^{(p)}\rangle \sim \mathbb{P}|\mathcal{F}_0$$

であり，かつ

$$M(T,\mathcal{F}_0) = \kappa \quad .$$

証明は，螺旋 $X^{(p)}=(x_n^{(p)})$ $(p=1,2,\cdots,\kappa)$ を

$$x_1^{(p)} = 1_{A_p} - E[1_{A_p}|\mathcal{F}_0]$$

($E[x|\mathcal{F}_0]$ は条件 $\mathcal{F}_0$ の下での x の条件付期待値）となるように定め，螺旋列 $\mathcal{X}=(X^{(p)})_{p=1,2,\cdots,\kappa}$ が，定理1の条件即ち $\mathcal{X}$ が予見可能独立で，$\langle X^{(p)}\rangle>0$ a.s. であることを先の正則条件から導くという方針をとればよい。

本稿は，文献表の [6] の梗概である。

References

[1] N.H.A.Davis-P.Varaiya, The multiplicity of an increasing family of σ-fields, Ann.Probab. 2(1974),958-963.

[2] J.de Sam Lazaro-P.A.Meyer, Méthodes de martingales et théorie de flots, Z.Wahrsch.Verw.Gebiete 18(1971),116-140.

[3] H.Kunita-S.Watanabe, On square integrable martingales, Nagoya Math. J. 30(1967),209-245.

[4] T.Shimano, An invariant of systems in ergodic theory, Tohoku Math. J. 30(1978),337-350.

[5] T.Shimano, Helix-representation in ergodic theory, Math. Reports Toyama Univ. 6(1982), 37-84.

[6] T.Shimano, The multiplicity of helices for a regularly increasing sequence of σ-fields, Tohoku Math. J. 36(1984),141-148.