数理解析研究所講究録
第 566 巻 1985 年 130-144

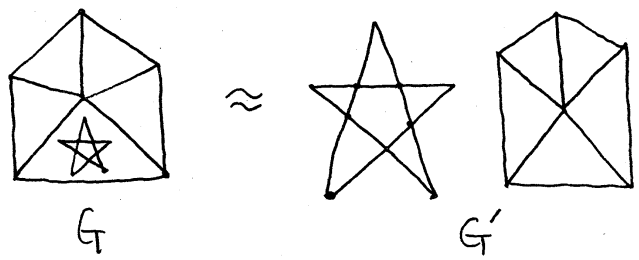
グラフと絡み輪に関する多項式

東女大文理　小林一章(Kazuaki Kobayashi)

各辺が a_+, a_-, b_+, b_- のいずれかの記号をもつグラフを記号つきグラフといいます(coded graph). このときグラフはループ及び多重辺をもっても良いとします。G を2次元球面 S^2 上の coded graph とし, G の集合 $\{G\}$ に次のような同値関係 $\approx$ を入れる。(後で述べる絡み輪の図(diagram)との対応のために同値関係の型を4つのタイプ[0]～[III]に分けておきます。)

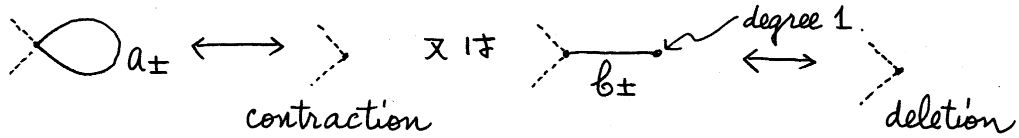
[0] 非連結なグラフ G の連結成分の S^2 上における位置を任意に変えて出来るグラフ G' に対し $G\approx G'$

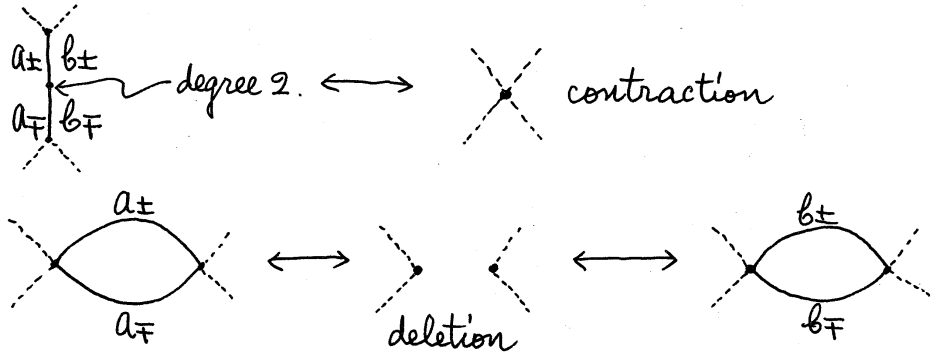
例

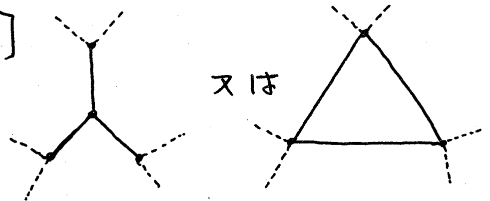


ただし G と G' の対応する辺の記号は同じとする。

以下の[I]～[III]の図において実線の辺(又は頂点)以外で G と G' は同じとする。このとき $G\approx G'$ とする。

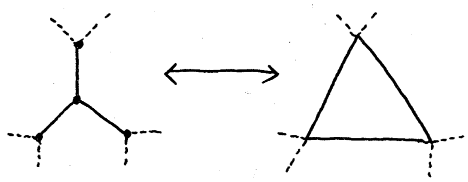
[I] 

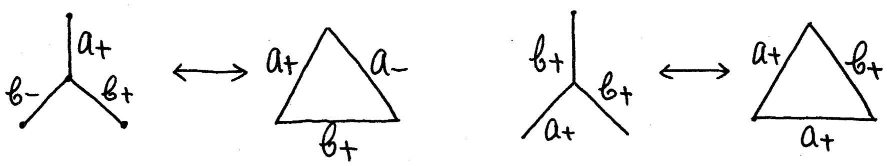
[II] 

[III] 

の3辺において次の各場合を除外する。3辺共がa又はbの時は$+$，$-$の符号は全て同一，3辺の中にaもbも含まれているときは2つある方の符号が一致して残りの1つがそれと反対.

例. $(a_\pm, a_\pm, a_\pm)$, $(b_\pm, b_\pm, b_\pm)$, $(a_\pm, a_\pm, b_\mp)$, $(a_\mp, b_\pm, b_\pm)$

これ以外のとき  交換可能.

各辺の記号は"対辺"に移りaとbは入れかわり，$\pm$は変らない。 例 

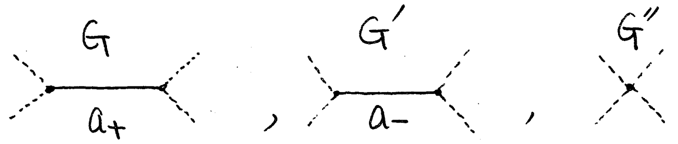
このようにS^2上の coded graph の集合$\{G\}$に同値関係を定義し，その同値類$[G]$に次のようにLaurent polynomial（L−

多項式）を定義する．（以下レー多項式 $Q_{[G]}(x,y,z)$ を Q_G と略記する事が多い。）

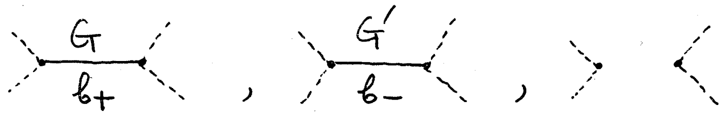
$$G \approx \underbrace{\cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \cdots\cdot}_{k個} \Longrightarrow Q_G = \left(\frac{x-y}{z}\right)^{k-1}$$

G, G', G'' が S^2 上の3つの coded graphs で G（又は G'）の一つの辺の所で下記の関係にあり他の部分では一致するとき

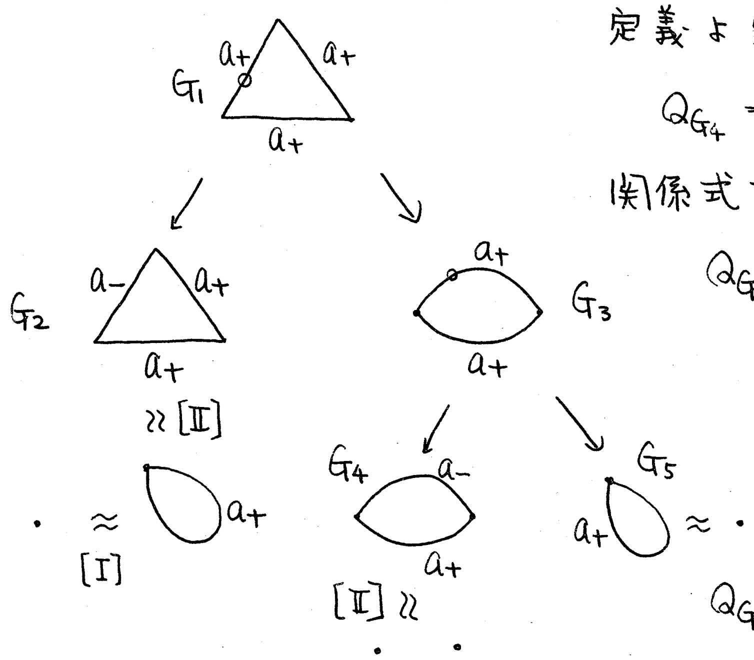
$xQ_G - yQ_{G'} = zQ_{G''}$　という関係式が成り立つ．



又は



例.



定義より $Q_{G_2} = Q_{G_5} = 1$

$$Q_{G_4} = \frac{x-y}{z}$$

関係式を使って

$$Q_{G_3} = \frac{y}{x}Q_{G_4} + \frac{z}{x}Q_{G_5} = \frac{y}{x}\cdot\frac{x-y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{xy-y^2+z^2}{xz}$$

$$Q_{G_1} = \frac{y}{x}Q_{G_2} + \frac{z}{x}Q_{G_3} = \frac{y}{x} + \frac{xy-y^2+z^2}{x^2} = \frac{2xy-y^2+z^2}{x^2}$$

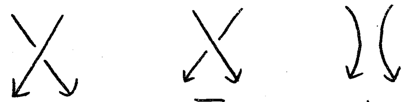
3次元球面S^3内のlink Kに次の性質をもつL-多項式$\widetilde{Q}_K = \widetilde{Q}_K(x,y,z)$を定義する。(Kは向きづけられているとする。)

(1) Kがk個の成分をもつ自明な絡み輪(link) $\Rightarrow \widetilde{Q}_K = \left(\dfrac{x-y}{z}\right)^{k-1}$

(2) K, $\overline{K}$, Lがある交差点の近くで次の関係にあり、他の所では一致しているような3つのlinksなら

$$x\widetilde{Q}_K - y\widetilde{Q}_{\overline{K}} = z\widetilde{Q}_L$$

という関係式が成立する。



K　　$\overline{K}$　　L

命題(J. Hoste). $\widetilde{Q}_K$はKのambient isotopy invariantである.

即ち　KとK'がambient isotopic $\Rightarrow \widetilde{Q}_K = \widetilde{Q}_{K'}$

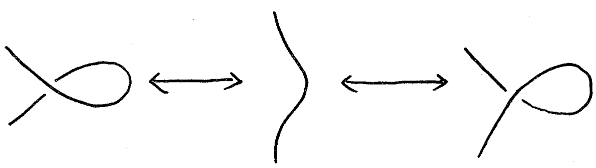
ここでKとK'がambient isotopic ($K \approx K'$) とは

$\exists$ 1-parameter family $\{h_t\}_{t\in[0,1]}$ of homeomorphisms of S^3

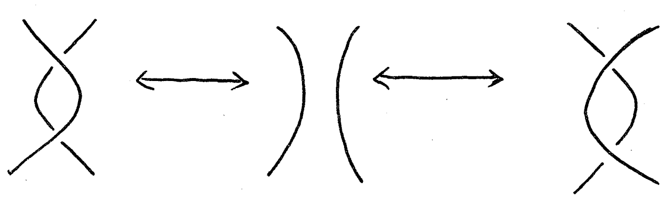
$\ni$ $h_0 = id_{S^3}$, $h_1(K) = K'$ という事である。

更に$K \approx K'$なら次の3種類のReidemeister moves (R-move)の有限列でKとK'が移り合える事が知られている。([R])

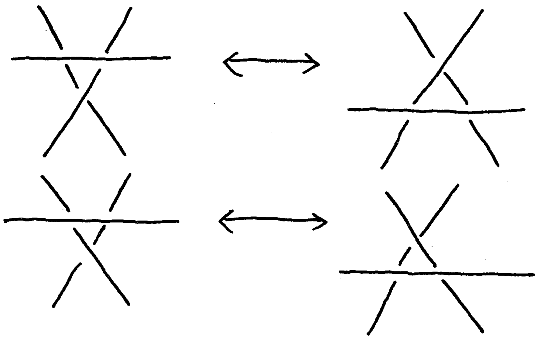
$[\mathrm{I}]_R$



$[\mathrm{II}]_R$

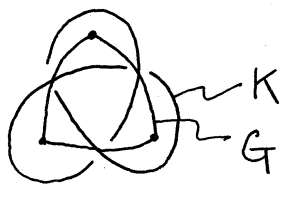


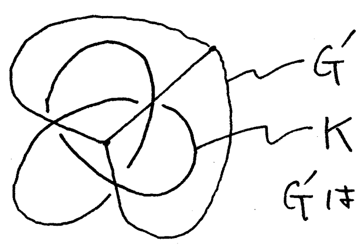
$[\mathrm{III}]_R$



そこで oriented link K (の diagram) にグラフを次のように対応させる。Kを$\mathbb{R}^2$上の diagram と考え，$\mathbb{R}^2-K$の unbounded region に接している$\mathbb{R}^2-K$の1つの領域にグラフの1つの頂点を取り，その頂点を含む領域に隣接しているKの crossing にグラフの辺を対応させ，crossing を隔てて次の$\mathbb{R}^2-K$の領域にグラフの次の頂点を対応させる。このようにして次々と頂点と辺を作ってグラフGを作る。$\mathbb{R}^2-K$の unbounded region に頂点を取り，そこから crossing に辺を対応させるという作り方で作るとGの双対グラフG'が作れるが，このG'はKがk個の成分をもつ自明な絡み輪のとき成分の個数を識別出来ないから採用しない (cf. [Y-K])

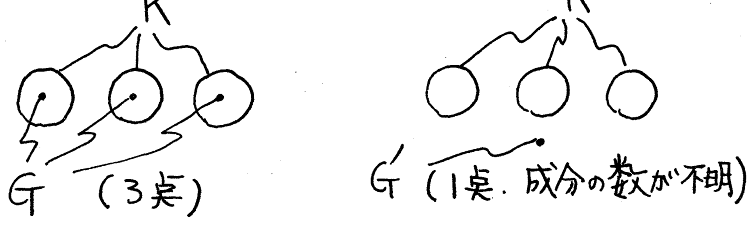
例.



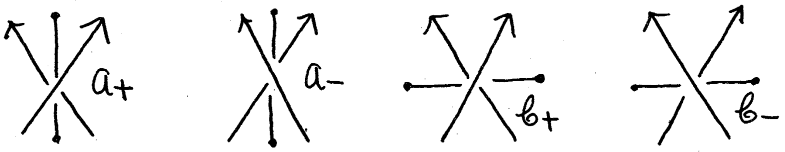


G'は採用しない.

G'を採用しない理由

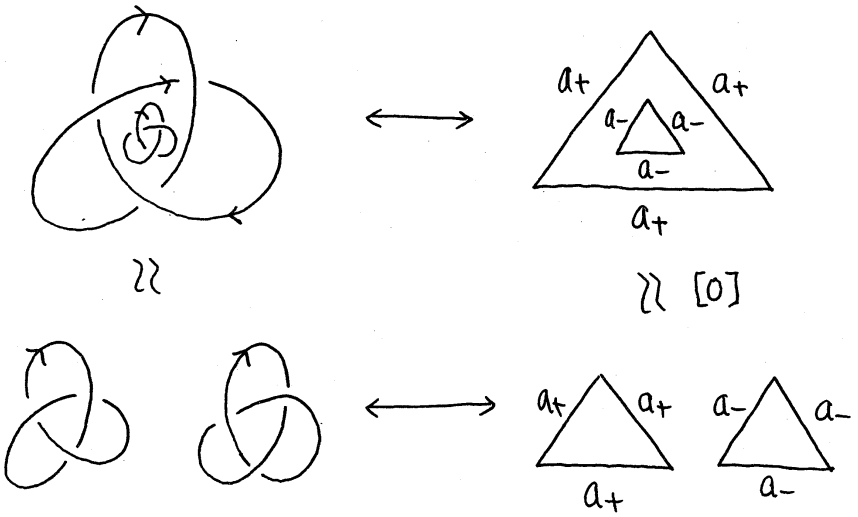


グラフGに次のように絡み輪Kから導入されるcodeを対応させる。(矢印のついている実線がKの部分)

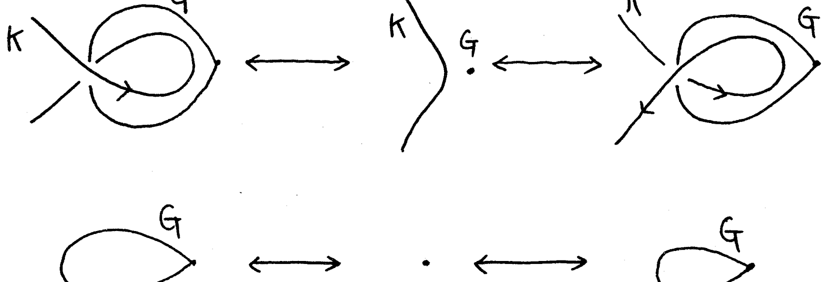


このようにして作ったcoded graph GにR-moves $[\mathrm{I}]_R$, $[\mathrm{II}]_R$, $[\mathrm{III}]_R$ に対応するグラフの同値関係を考えると前に述べたグラフの同値関係[I], [II], [III] になる。尚グラフの同値関係[0]にはsplit linkのsplitしている成分毎のambient isotopyが対応している。

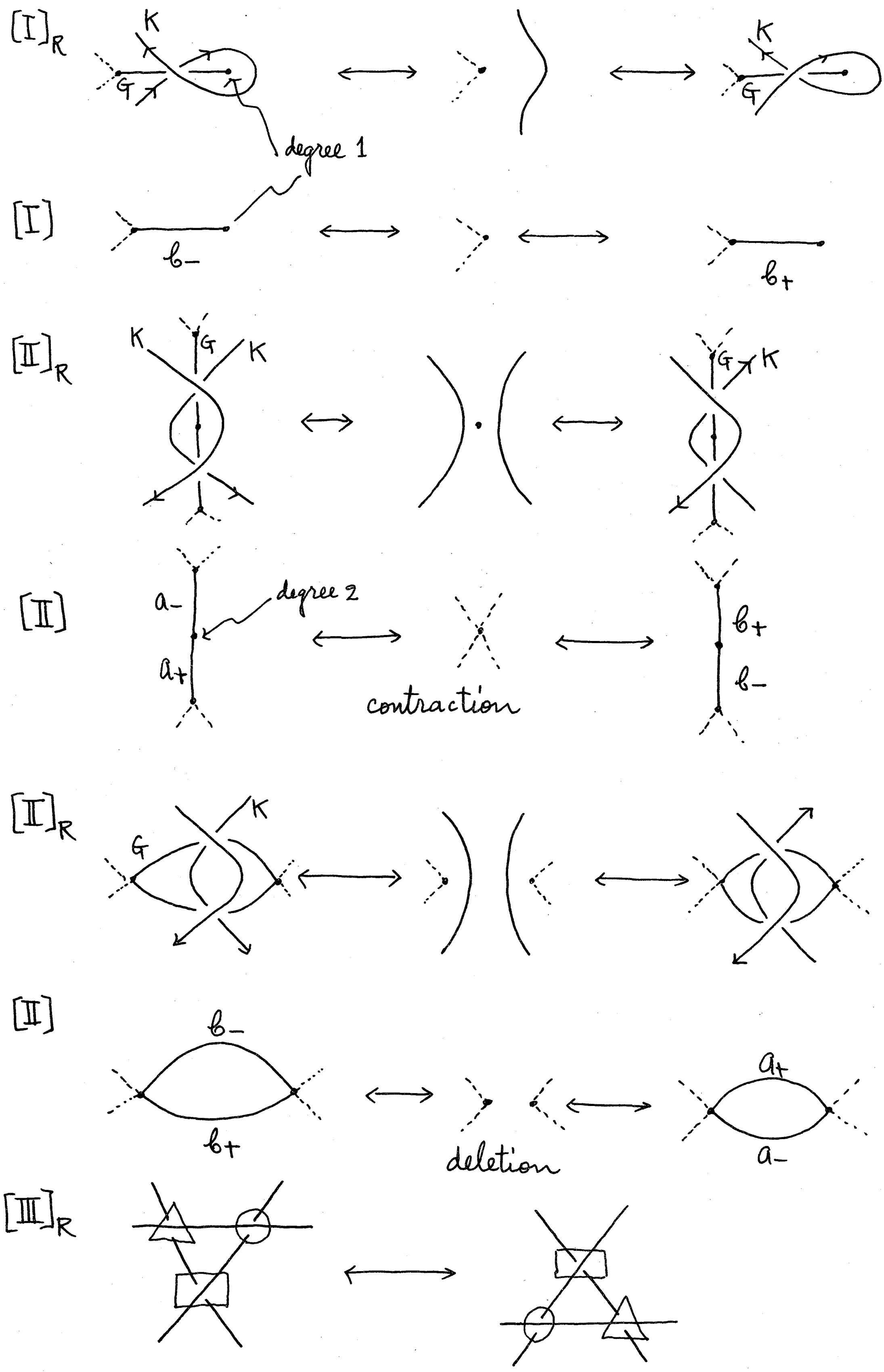
例.



$[\mathrm{I}]_R$

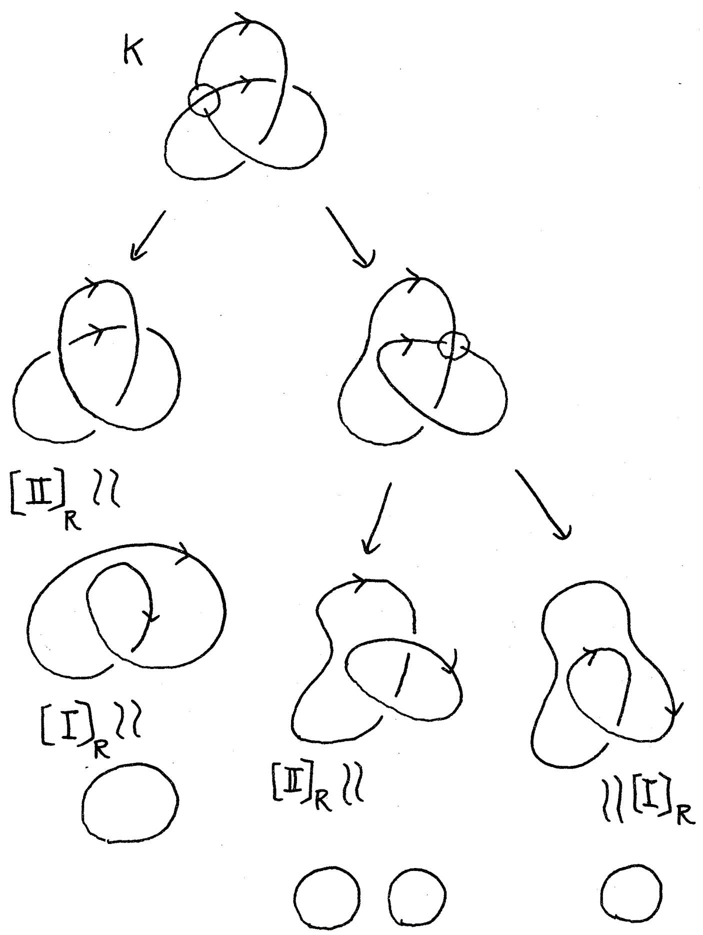


[I]

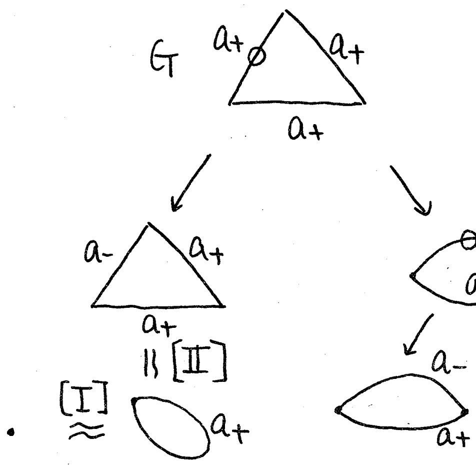

[I]_R
K
G
K
G
degree 1
[I]
b−
b+
[II]_R
K
G
K
G
K
[II]
a−
degree 2
a+
b+
b−
contraction
[II]_R
G
K
[II]
b−
b+
a+
a−
deletion
[III]_R

命題．絡み輪Kのレー多項式 $\widetilde{Q}_K$ はKに対応するcodedグラフG（の同値類）のレー多項式 Q_G に等しい．

例．



Kの変形を対応するグラフGで行なうと下図．このグラフGのレー多項式は前に計算したように $Q_G = \dfrac{2xy - y^2 + z^2}{x^2}$



従って絡み輪Kの Hoste多項式 $\widetilde{Q}_K$ はグラフの変形を使って計算出来る。このHoste 多項式は非常に強力な link invariant で

$$\widetilde{Q}_K(1, 1, \sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}) = \Delta_K(t) \pmod{\pm t^n} : \text{reduced Alexander poly.}$$

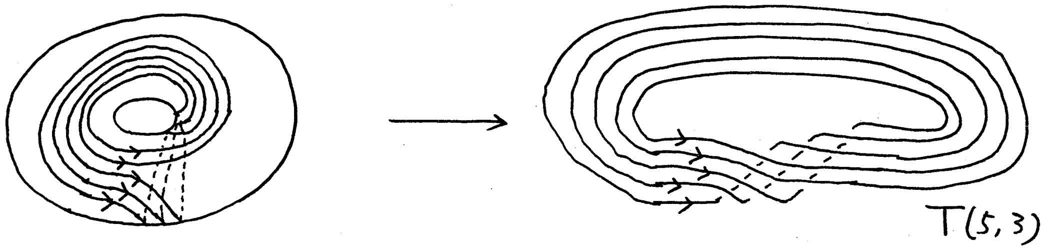
$$\widetilde{Q}_K(1, 1, z) = \nabla_K(z) : \text{Conway polynomial}$$

$$\widetilde{Q}_K(t, t^{-1}, t^{-\frac{1}{2}}-t^{\frac{1}{2}}) = V_K(t) : \text{Jones polynomial}$$

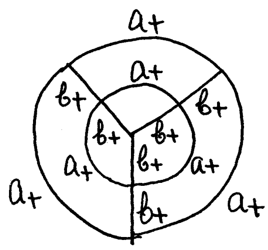
等が知られており，更にいくつかの基本的な性質が成立している．([H])．([K])．

coded graphを利用すると複雑なグラフが簡明に表現出来る。

例．(5,3)-torus knot T(5,3)

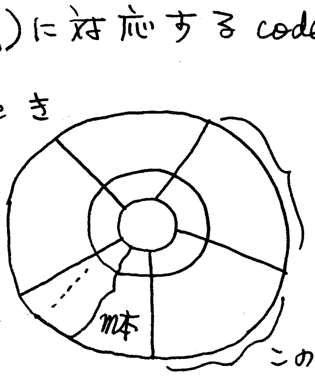


T(5,3)に対応するcoded graph G(5,3)



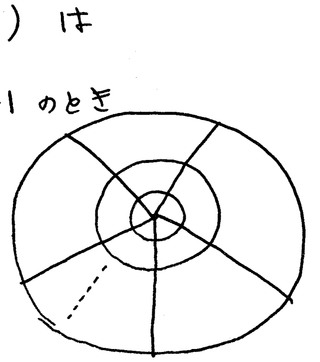
一般にT(p,q)に対応するcoded graph G(p,q) は

p=2m のとき



この領域がq個

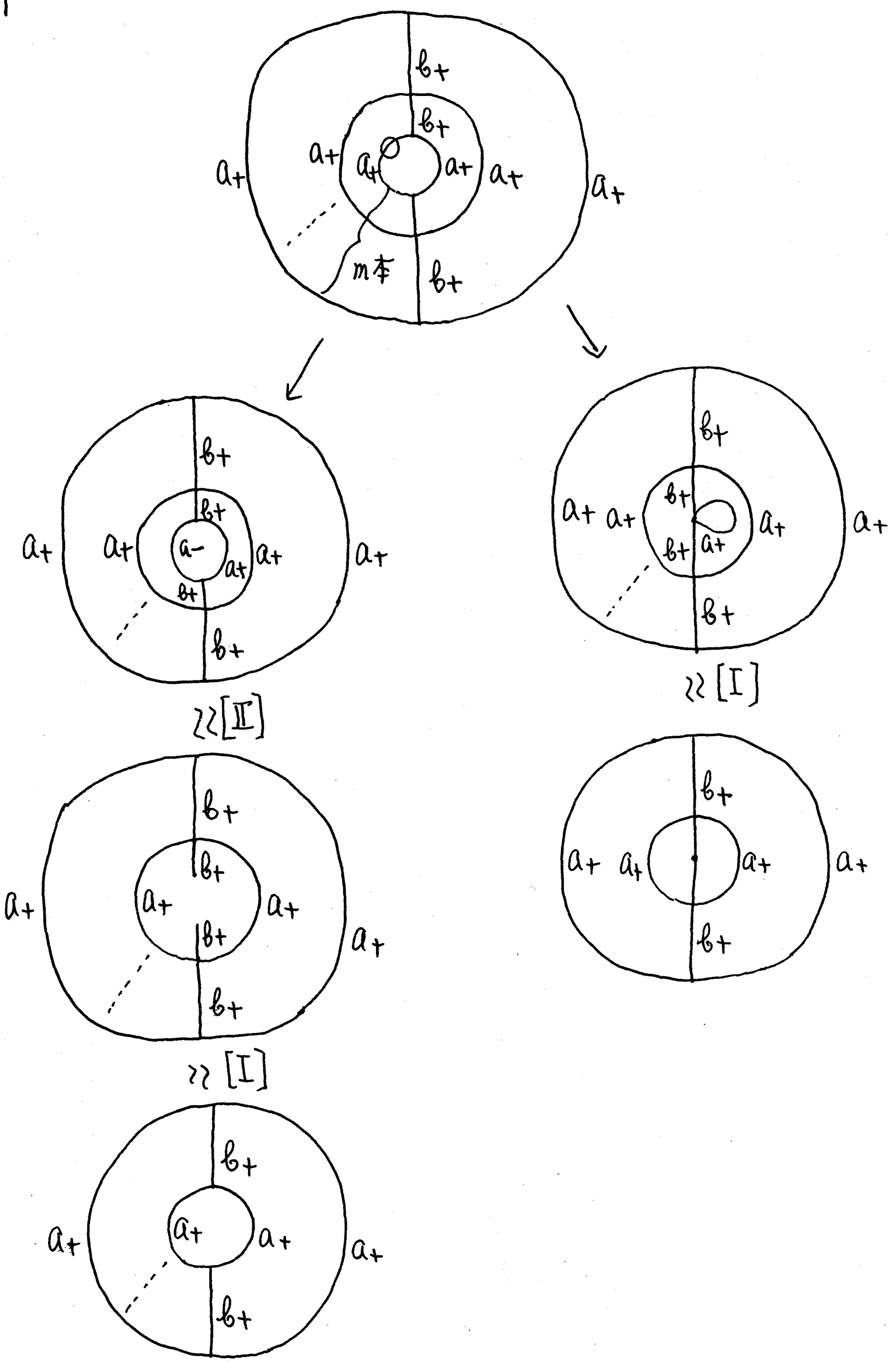
p=2m+1 のとき



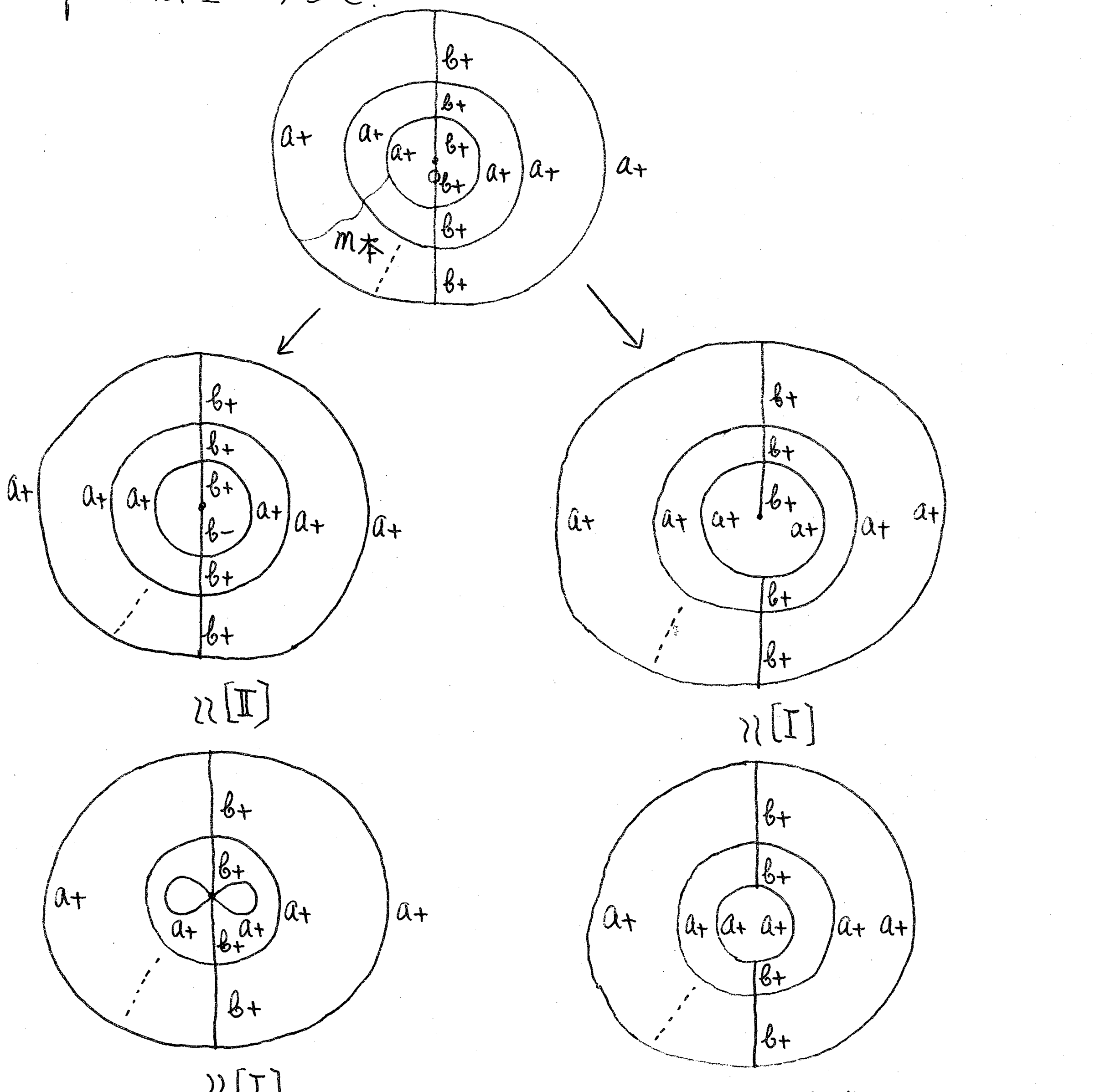
そして同心円周上の辺の code は全て a_+, 円の中心に向かう辺の code は全て b_+ となる。

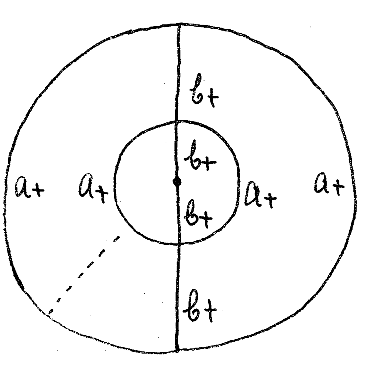
例. $(p,2)$-torus link $T(p,2)$ の Hoste 多項式.

$p=2m$ のとき



$p = 2m+1$ のとき





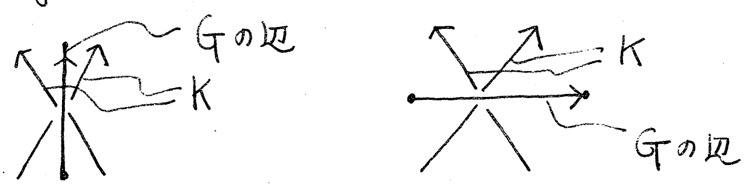
以上より p の偶，奇数にかゝわらず $\widetilde{Q}_{T(p,2)} = \frac{y}{x}\widetilde{Q}_{T(p-2,2)} + \frac{z}{x}\widetilde{Q}_{T(p-1,2)}$ が成り立ち

$T(0,2) = \bigcirc\bigcirc$ $\quad T(1,2) = \bigcirc$

従って $\widetilde{Q}_{T(0,2)} = \frac{x-y}{z}$，$\widetilde{Q}_{T(1,2)} = 1$

それ故上の漸化式を使って全ての $\widetilde{Q}_{T(p,2)}$ が計算出来る。

次にS^2上のどのようなグラフGがlink diagramから作られるグラフに成り得るかを考える。それにはG上のcodeだけでは情報が不足なのでGにorientationを入れ，そのorientationとlink diagram Kとは次のように対応しているとする。（以



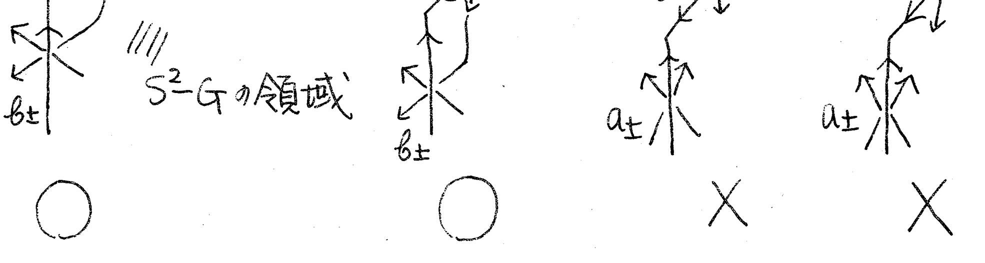
下で述べるようにG及びその双対グラフを同時に考えればG上の向きは不要になる。）

先ず有向グラフ $G\subset S^2$ が絡み輪Lから作られるグラフになるための必要条件を上げる。

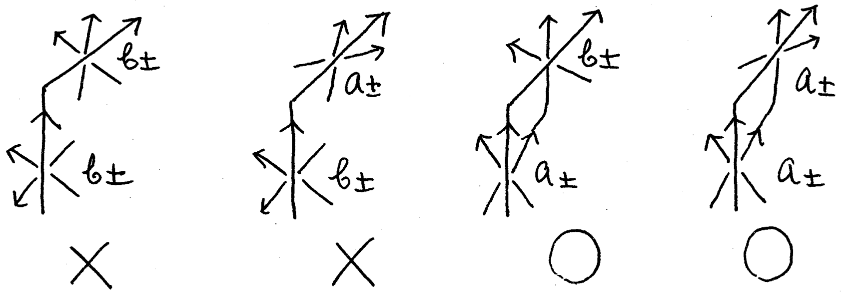
必要条件I．Gの2つ以上の頂点が絡み輪Lのdiagramの1つの領域に入ってはいけないのでGの各頂点を分けるようなLの部分がなければならない。この条件を満足しているかどうかを個別に調べると以下のようになる（○印のあるものが実際につなげるもの．

S^2-G の領域が3角形以上のとき

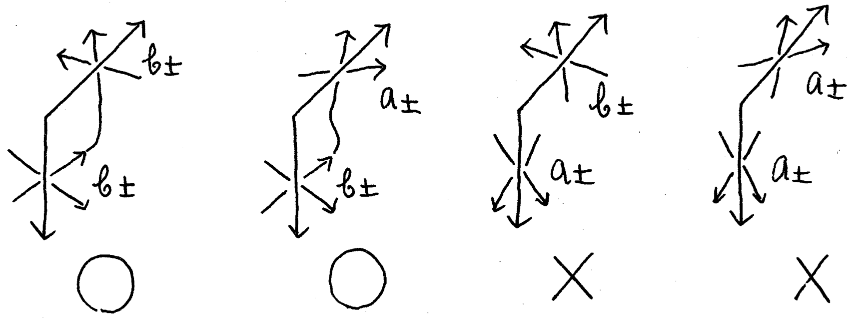
(A)



(B)

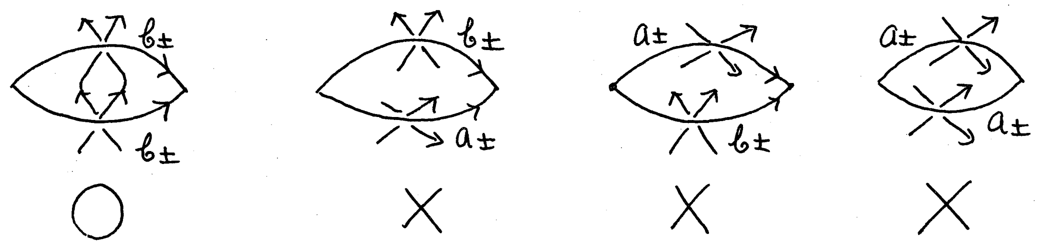


(C)

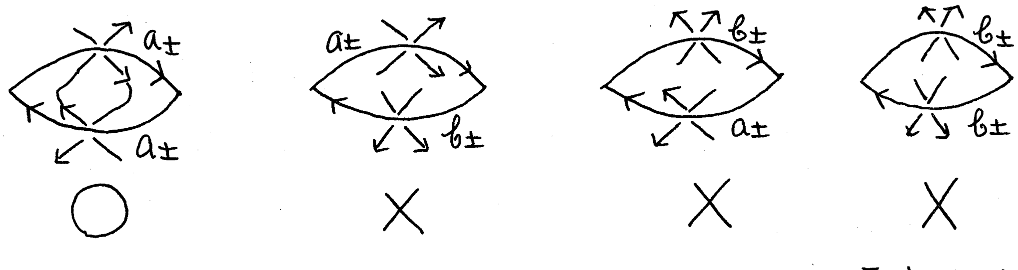


$S^2 - G$ の領域が2角形のとき

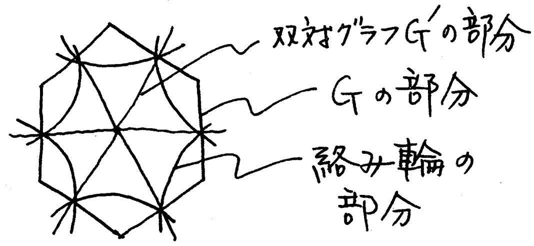
(D)



(E)

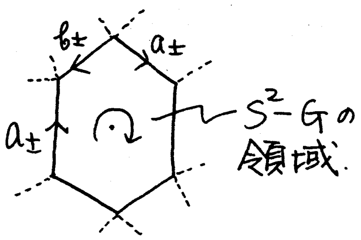


必要条件Ⅱ. $S^2 - G$ の各領域内に双対グラフの頂点は唯一つ存在しなければならない。所が下図のように必要条件Ⅰを満足していればこの条件Ⅱは自動的に満足している事がわかる。またこれらの条件で実際絡み輪が書けるから十分条件にもなっている。



以上の結果を児玉(北大.理)は次のようにまとめた。

S^2-G の各領域に時計廻りの向きをつけ，領域の向きに従って境界上の code を読んでいく.



$w = ab^{-1}a\cdots\cdots$

べき指数は領域の向きと辺の向きが一致したとき +1, 反対向きになったとき −1 とする。

定理1. oriented coded graph G が link から作られるグラフとなるための必要十分条件は，S^2-G の各領域で上のようにして作った word w が $w = \cdots\cdots a^{\varepsilon} *^{\varepsilon} \cdots\cdots b^{\varepsilon'} *^{-\varepsilon'}$ となっている事である。ここで $\varepsilon, \varepsilon' = +1$ 又は -1. $* = a$ 又は b」

系. $\varepsilon_b(w)=0$ （$\varepsilon_b(w)$ は word w の中に出て来る指数の和）.

定理2. coded graph G が link から作られるグラフとなるための必要十分条件は，次の(1),(2)を満足する事である。

(1) S^2-G の各領域の境界上に含まれる b の個数は偶数個.

(2) S^2-G の各頂点のまわりの a の個数は偶数個.」

定理2の条件の十分性に関する証明は(1),(2)の条件から定理1の条件を満足する oriented coded graph $\tilde{G}$ を作ってやればよい。

References

[H] Jim Hoste : An invariant of links, (to appear in Bull. Amer. Math. Soc.)

[K] K. Kobayashi : Link の Hoste 多項式について, 数理解析研講究録「コンピューターを利用した低次元トポロジーの研究」.

[R] K. Reidemeister : Knoten Theorie, Chelsea (1948)

[Y-K] T. Yajima and S. Kinoshita : On the graph of Knots, Osaka Math. J. 9 (1957) 155–163.