数理解析研究所講究録
第 566 巻 1985 年 177-184

可縮なＰＯＳＥＴに関する一注意

東海大　理学部　郡山　彬　(Akira Koriyama)
東海大　理学部　土屋　守正　(Morimasa Tsuchiya)

$P=(P, \leqq)$ を finite poset とする。

Pの order complex を $\Delta(P)$ とする。

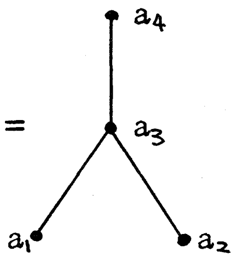
i.e. $(a_0, a_1, ..., a_n)$ が n－simplex in $\Delta(P)$

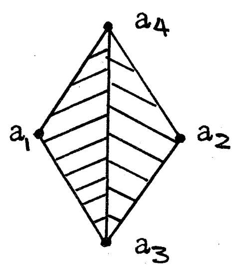
$\Longleftrightarrow$

$a_{i_0} < a_{i_1} < .. < a_{i_n}$ が n－chain in P

<u>Def</u>. Pが contractible $\Longleftrightarrow$ polyhedron $|\Delta(P)|$ が contractible

<u>Ex</u>.

P = 

ならば $|\Delta(P)|$ = 

故にPは contractible 。

我々は以下に述べる理由から contractible poset に注目したい。

(1) poset を homology の立場で分類するとき，1点の次に単純な poset は contractible な poset である。

(2) 同じことであるが polyhedron (or simplicial complex) を face poset を通して研究するとき，最も基本的図形に対応する poset である。

(3) 応用上重要である。 (See, Quillen, Brini, Bjorner)

例えば，

P, Q: posets, $P \times Q = \{(p, q) \mid p \in P, q \in Q\}$

$(p,q) \leqq (p_1, q_1)$ iff $p<p_1$ and $q<q_1$

とすると

明らかに $(P \times Q, \leqq)$ は posetである。 このとき，次の定理が成り立つ。

定　理.　$Z \subset P \times Q$: $^{\forall}$closed (i.e. $\hat{p} < \hat{q} \in Z \Rightarrow \hat{p} \in Z$) subsetとする。

$^{\forall}p \in P$, $^{\forall}q \in Q$　に対して

$$Z_p = \{q \in Q \mid (p,\ q) \in Z\}$$

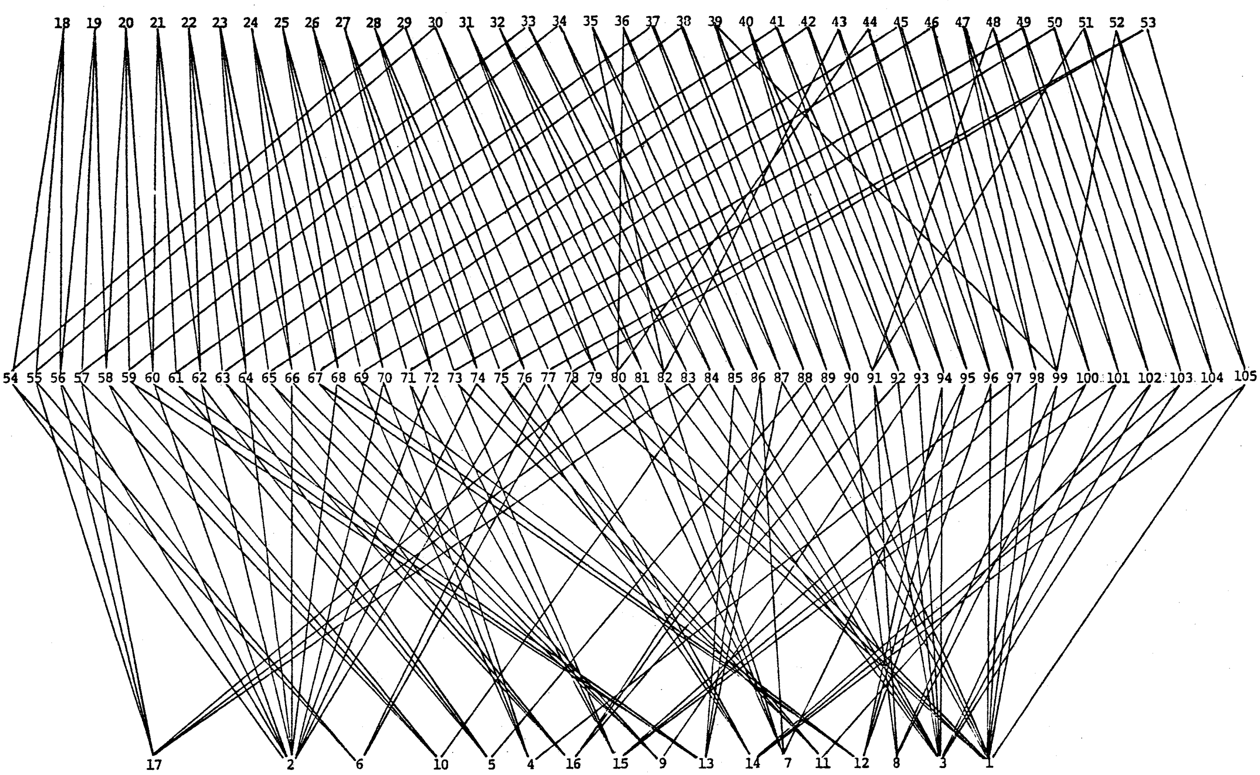
$$Z_q = \{p \in P \mid (p,\ q) \in Z\}$$

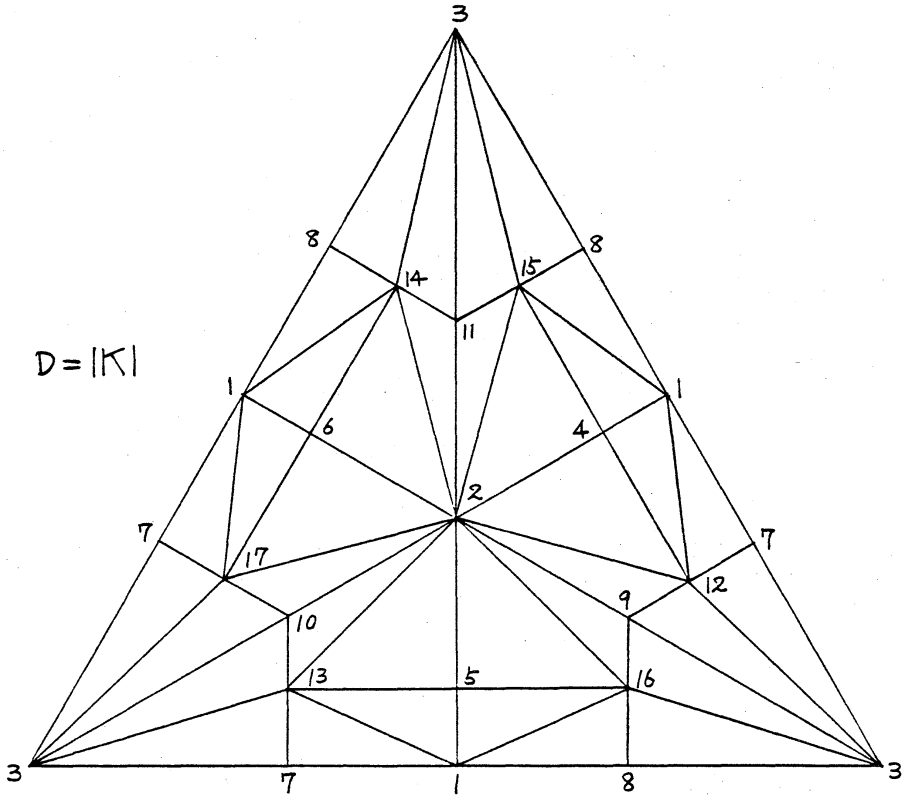
が共に contractible

$\Longrightarrow$

$P \simeq Q$　:　same homotopy type

さて，与えられた poset が contractible かどうか判定するのは，やさしくはない。　例えば，dunce hat の三角形分割から得られる，次のような face poset は contractible か？




3
8
14
15
8
11
D = |K|
1
1
6
4
2
7
17
7
12
9
10
13
5
16
3
7
1
8
3

Quillen は［QUI］において，次のような概念を定義した。

Def.　poset P が C－contractible

$\Longleftrightarrow$

$\exists x_0 \in P$,　order-pres. map $f: P \to P$　s. t.

(1) $f(x_0) = x_0$,

(2) $x \leq f(x) \geq x_0$　(for all $x \in P$).

この概念が contractible になるための十分条件になっていることが，次のようにしてわかる。

Lemma.　$f, g : P \to P$　order-prs. map　s. t.

$f(x) \leq g(x)$　(for all $x \in P$)

$\Longrightarrow$

$|f| \simeq |g|$: homotopic,

ここで $|f|, |g| : |\Delta(P)| \to |\Delta(P)|$ は f, g から引き起された連続写像

Cor.　poset P が C－contractible

$\Longrightarrow$

$|1_P| \simeq \varepsilon_{x_0}$: homotopic

, where $|1_P| : |\Delta(P)| \to |\Delta(P)|$: identity map

$\varepsilon_{x_0} : |\Delta(P)| \to x_0 \in |\Delta(P)|$　: const. map

すなわち，P は contractible

確かに C－contractibility は十分条件であるが，実用面からみると，それ程使いやすい条件ではない。　例えば，先に述べた dunce hat から得られた poset が C－contractible かどうか考えてみればよい。　そこで，我々は，C－contractible と同値な，もっと使いやすい条件を求めてみた。

Def.　P : poset,　$P' \subset P$: $^\forall$subset

$x \in P$ が weakly comparable with P'

$\Longrightarrow$

$\exists y \in P'$　s. t.　x と y は comparable

Def.　Pが weakly C－contractible

$\Longleftrightarrow$

$^{\exists}x_0 \in P$，　order-pres. map $f : P \longrightarrow P$　s．t．

（1）x_0 は minimal element

（2）$f(x_0) = x_0$

（3）$x_0 \leq f(x)$　(for all $x \in P$)

（4）$x \leq f(x)$　(for all $x \in P$ which are weakly comparable with $P(x_0) = \{y \in P \mid x_0 \leq y\}$)

定　理．　P は2点以上からなる poset とする。　次の3つの条件は同値である。

（A）$^{\exists}x_0 \in P$，　weak C－contraction $f : P \longrightarrow P$ at x_0
s．t．　$f(x) = x$　(for all maximal elements x of P)

（B）$^{\exists}x_0 \in P$ so that P は weakly C－contractible at x_0，かつ
$P(x_0)$ はPの maximal element を全て含む

（C）$^{\exists}y_0 \in P$ so that P は C－contractible at y_0

（証明）

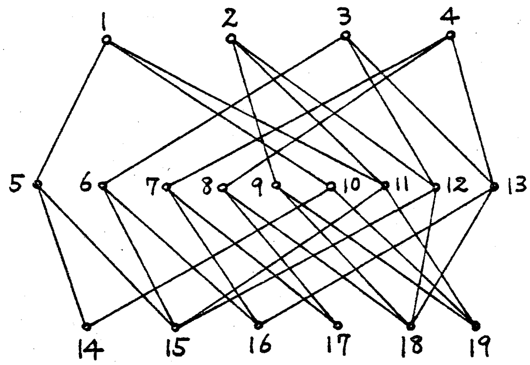
（A）$\Longrightarrow$（B）$\Longrightarrow$（C）　は easy

（C）$\Longrightarrow$（A）

y_0 が（i） maximal element，（ii） minimal element，（iii）どちらでもない，の3つの場合に分けて証明すればよい（省略）

Cor.　多面体 $|\Delta(P)|$ は contractible であるが posetP がC－contractible でない例が存在する

次の図を参照

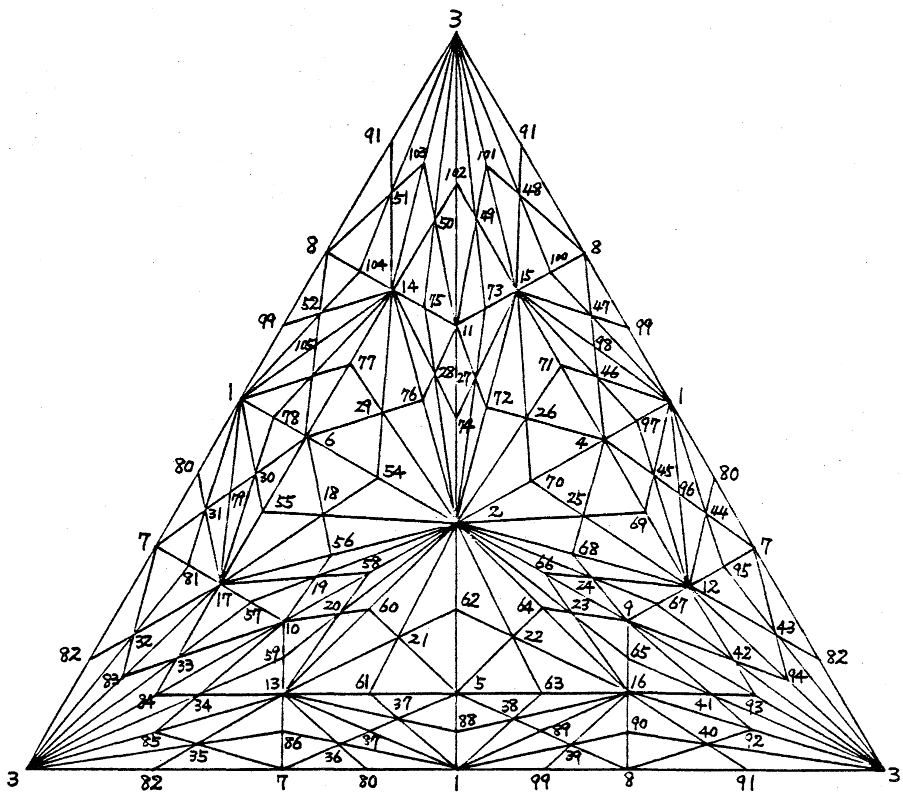


この poset には，P（x_0）が すべての maximal element を含むようなx_0が存在しない。 従って，C－contractible ではない。

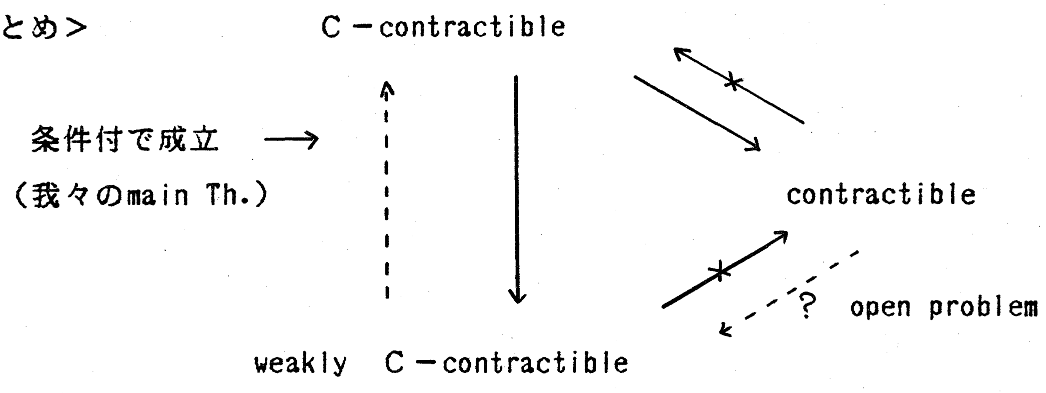
<u>NOTE</u>. この例は weakly C－contractible になっていることに注意。

<u>Ex</u>. 次のように三角形分割した dance hat の face poset は not C－contractible，but weakly C－contractible である。
（dunce hat とその face poset 等については前図を参照）

The first barycentric subdivision K' of K.



＜まとめ＞



以下，dual をとる操作と contractibility との関係を少し述べる。

P： poset

$\overline{P}$： dual poset (i.e. the poset with reversed ordering)

とする。 明らかに

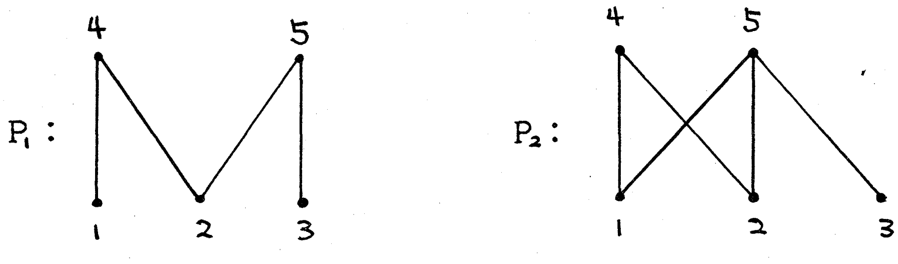
$$|\Delta(P)| \approx |\Delta(\bar{P})| \quad : \text{同相}$$

一方，次のことがわかる。

<u>Prop</u>. C (weakly C)－contractible の概念は dual をとる操作では，保存されない。

次の例を参照

<u>Ex</u>.



P_1 はC－contra. at $x_0 = 2$

$\overline{P}_1$ は not C－contra.

P_2 は weakly C－contra. at $x_0 = 3$

$\overline{P}_2$ は not weakly C－contra.

References

[B-G-S] A.Björner, A.M.Garsia and R.P.Stanley; An introduction to Cohen-Macaulay ordered sets, I.Rival(ed.), Ordered Sets, (1982), 583-615, D.Reidel Publishing Company.

[BJO] A.Björner; Homotopy type of posets and lattice complementation, J.Combinatorial Theory, Series A, 30 (1981), 90-100.

[BRI] A.Brini; Some homological properties of partially ordered sets, Adv. Math., 43 (1982), 197-201.

[K-T] A.Koriyama and M.Tsuchiya, A Note on Contractibility of Posets, Proc. Fac. Sci. Tokai Univ. XX (1985), 73-84.

[QUI] D.Quillen; Homotopy properties of the poset of nontrivial p-subgroups of a group, Adv. Math., 28 (1978), 101-128.

[RIV] I.Rival; The retract constraction, I.Rival(ed.), Orderd Sets, (1982), 97-122, D.Reidel Publishing Company.

[ROT] G.C.Rota; On the foundations of combinatorial theory I, Theory of Möbius functions, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, 2 (1964), 340-368.