数理解析研究所講究録
第566巻 1985年 189-197



# nonsimple balanced arrays

東京理大・理 栗木進二 (Shinji Kuriki)

## 1. 序

ある $n \times m$ の (0.1) 行列 T の任意の $t$ 個の列からなる部分行列 $T_0$ において, weight が $j$ である $t$ 次元の (0.1) ベクトルがいずれも $T_0$ の行として, ちょうど $\mu_j$ 回 ($j=0,1,\ldots,t$) 現われる時, T を, 強さ $t$, size $n$, 制約数 $m$, index set $\{\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_t\}$ の 2-symbol balanced array といい, $BA(n,m,2,t)\{\mu_j\}$ とかく。明らかに, $n=\sum_{j=0}^{t}\binom{t}{j}\mu_j$ である。

もし $BA(n,m,2,t)\{\mu_j\}$ が強さ $m$ の balanced array でもあるならば, それは simple $BA(n,m,2,t)\{\mu_j\}$ (略して simple array) という。

また, T のある分割 ($T_1, T_2$) (ここで $T_j$ は $n \times m_j$ 行列, $m=m_1+m_2$) に対して, $T_1$ では weight が $p_1$ であり $T_2$ では weight が $p_2$ である $m$ 次元の (0.1) ベクトルがいずれも T の行として, ちょうど $\mu(p_1;p_2)$ 回 ($p_j=0,1,\cdots,m_j$) 現われる時, T を強さ ($m_1$,

$m_2$)の simple partially balanced array という。

もし BA($n$.$m$.2.$t$){$\mu_j$}が．ある($m_1$.$m_2$)に対して．強さ($m_1$.$m_2$)の simple partially balanced array であるならば．semisimple BA($n$.$m$.2.$t$){$\mu_j$}(略して semisimple array)という。

simple array は．すべての($m_1$.$m_2$)に対して．semisimple array である。

BA($n$.$t$.2.$t$){$\mu_j$}は明らかに simple array である。BA($n$.$t$+1.2.$t$){$\mu_j$} も simple array であることがよく知られている。また．nonsimple BA($n$.$t$+2.2.$t$){$\mu_j$}が存在することも知られている(例えば白倉[4])。$t$=2.3.4 の時．山本·栗木·名取[6]は．nonsimple BA($n$.$t$+2.2.$t$) しか存在しないようないくつかの index sets {$\mu_j$}を与え．栗木·山本[3]は．そのすべての index sets {$\mu_j$} を与えた。

本稿において．それらの nonsimple BA($n$.$t$+2.2.$t$) しか存在しないような index sets {$\mu_j$} に対して．semisimple array が存在することが示される。したがって．$t$=2.3.4 の時．BA($n$.$t$+2.2.$t$){$\mu_j$}が存在するならば．同じ index set {$\mu_j$}を持つ semisimple BA($n$.$t$+2.2.$t$)が存在することが示される。

## 2. 必要十分条件

$BA(n,t+2,2,t)\{\mu_j\}$ の存在のための必要十分条件が，最初 Srivastava [5] によって得られた。最近，強さ $t$，制約数 $t+2$ の $s$-symbol balanced array の存在のための必要十分条件が，栗木[1,2] によって得られ，ここでは，後者に従って，2-symbol balanced array の存在条件が議論される。

ある $n\times(t+2)$ の $(0,1)$ 行列を T とし，その列番号の集合 $\{1,2,\ldots,t+2\}$ を $\Omega$ とする。$\Omega$ のある部分集合 I に対して，$V(I)$ を I の列においては 0 が現われ，その他の列においては 1 が現われる T の行の個数とする。$V(\{i\})$ は $V(i)$ と略される。

もし，T が $BA(n,t+2,2,t)\{\mu_j\}$ であるならば，$|I|=t-j$ を満足する $\Omega$ の互いに素な部分集合 I と $\{i_1,i_2\}$ のあらゆる族に対して，ある方程式系

$$(2.1)\qquad V(I)+V(I\cup\{i_1\})+V(I\cup\{i_2\})+V(I\cup\{i_1,i_2\})=\mu_j$$

が満たされる。逆に，もし，ある与えられた非負の整数の集合 $\{\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_t\}$ に対して，(2.1) を満足する $2^{t+2}$ 個の非負の整数 $V(I)$ が存在するならば，$BA(n,t+2,2,t)\{\mu_j\}$ が存在する。

次の lemma と定理は，それぞれ栗木[1,2] と山本・栗木・名取[6] によって得られている。

<u>lemma 2.1.</u>

index set $\{\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_t\}$ と $t+3$ 個の非負の整数 $V(J)$ $(|J|\leq 1)$

が与えられた時．方程式系(2.1)の残りの$2^{t+2}-(t+3)$個の解$V(I)$($|I|\geqq 2$)は次式で与えられる。

(2.2) $$V(I)=\sum_{l'=0}^{l}(-1)^{l-l'}(l-l'+1)\mu_{t-l'}+(-1)^{l+1}\sum_{l'=0}^{l+1}V(i_{l-l'+2})+(-1)^{l+1}(l+1)V(\phi).$$

ここで．$I=\{i_1,i_2,\ldots,i_{l+2}\}$．$l=0,1,\ldots,t$.

定理2.2.

$BA(n,t+2,2,t)\{\mu_j\}$であるTの存在のための必要十分条件は，次の条件を満足する$t+3$個の非負の整数$V(\phi),V(1),V(2),\ldots,V(t+2)$が存在することである。

(条件)

(2.3) $$V(1)\leq V(2)\leq\cdots\leq V(t+2)$$

・$l$が偶数の時

(2.4) $$(l+1)V(\phi)+\sum_{l'=0}^{l+1}V(t-l'+2)\leq\theta_l$$

・$l$が奇数の時

(2.5) $$(l+1)V(\phi)+\sum_{l'=0}^{l+1}V(l'+1)\geqq\theta_l$$

$l=0,1,\ldots,t.$

ここで，

(2.6) $$\theta_l=\sum_{l'=0}^{l}(-1)^{l'}(l-l'+1)\mu_{t-l'}.$$

定理2.3.

simple $BA(n,t+2,2,t)\{\mu_j\}$であるTの存在のための必要十分条件は，定理2.2の条件を満足する$t+3$個の非負の整数

$V(\phi), V(1), V(2), \ldots, V(t+2)$が

(2.7) $$V(1)=V(2)=\cdots=V(t+2)$$

となることである。

$\Omega$のある分割を$(\Omega_1, \Omega_2)$とする。$BA(n, t+2, 2, t)\{\mu_j\}$であるTが*semimsimple array*になるための必要十分条件は，(2.1)を満足するあらゆる非負の整数$V(I)$が，$I=I_1 \cup I_2$（ここで$I_j \subset \Omega_j$）である$I_1$と$I_2$に対して，$I_1$と$I_2$の大きさにしか依存しないことである。lemma 2.1から，もし$V(J)$（$|J| \leqq 1$）が，$J=J_1 \cup J_2$（ここで$J_j \subset \Omega_j$）である$J_1$と$J_2$に対して，$J_1$と$J_2$の大きさにしか依存しなければ，$V(I)$（$|I| \geqq 2$）もまたそうであることがわかる。したがって，定理2.2から，次の定理が得られる。

<u>定理2.4.</u>

*semisimple* $BA(n, t+2, 2, t)\{\mu_j\}$であるTの存在のための必要十分条件は，ある$\alpha$に対して，定理2.2の条件を満足する$t+3$個の非負の整数$V(\phi), V(1), V(2), \ldots, V(t+2)$が

(2.8) $$V(1)=V(2)=\cdots=V(\alpha),\ V(\alpha+1)=V(\alpha+2)=\cdots=V(t+2)$$

となることである。

定理2.3と2.4からも，*simple array*は*semisimple array*であることが容易にわかる。

## 3. semisimple array

$t=2,3,4$ の時，定理 2.2 と 2.3 を用いて，栗木・山本 [3] は，次の定理を示した。

<u>定理 3.1.</u>

(3.1) $\theta_0 \geqq 2, \quad \theta_1=1, \quad \theta_2=2$

である index set $\{\mu_0, \mu_1, \mu_2\}$ を持つ BA$(n, 4, 2, 2)$ は存在し，nonsimple balanced array である。

<u>定理 3.2.</u>

(3.1) を満たさないような index set $\{\mu_0, \mu_1, \mu_2\}$ を持つ BA$(n, 4, 2, 2)$ が存在するならば，同じ index set $\{\mu_0, \mu_1, \mu_2\}$ を持つ simple BA$(n, 4, 2, 2)$ が存在する。

<u>定理 3.3.</u>

(3.2) (1) $\theta_0 \geqq 1, \quad \theta_1 \leqq 0, \quad \theta_2=1, 2, \quad \theta_3=1$

(2) $\theta_0 \geqq 2, \quad \theta_1 \leqq 0, \quad \theta_2=2, \quad \theta_3=2$

(3) $\theta_0 \geqq 3, \quad \theta_1 \leqq 3, \quad \theta_2=5, \quad \theta_3=6$

である index set $\{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ を持つ BA$(n, 5, 2, 3)$ は存在し，nonsimple balanced array である。

<u>定理 3.4.</u>

(3.2) を満たさないような index set $\{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ を持つ BA$(n, 5, 2, 3)$ が存在するならば，同じ index set $\{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ を持つ simple BA$(n, 5, 2, 3)$ が存在する。

定理3.5.

(3.3) (1) $\theta_0 \geqq 2u+2$, $\theta_1 = 3u$, $\theta_2 \geqq 4u+2$, $\theta_3 = 5u+1$, $\theta_4 = 6u+2$ $(u \geqq 1)$

(2) $\theta_0 = u+2$, $\theta_1 \leqq 2u+1$, $\theta_2 \geqq 3u+4$, $\theta_3 = 4u+3$, $\theta_4 = 5u+4$ $(u \geqq 1)$

(3) $\theta_0 \geqq 2$, $\theta_1 \leqq 0$, $\theta_2 \geqq 2$, $\theta_3 = 1$, $\theta_4 = 2, 3, 4$

(4) $\theta_0 \geqq 2$, $\theta_1 \leqq 0$, $\theta_2 \geqq 3$, $\theta_3 = 2$, $\theta_4 = 3, 4$

(5) $\theta_0 \geqq 2$, $\theta_1 = 1$, $\theta_2 \geqq 4$, $\theta_3 \leqq 2$, $\theta_4 = 4$

(6) $\theta_0 \geqq 2$, $\theta_1 \leqq 1$, $\theta_2 \geqq 4$, $\theta_3 = 3$, $\theta_4 = 4$

(7) $\theta_0 \geqq 2$, $\theta_1 \leqq 0$, $\theta_2 = 2$, $\theta_3 = 1$, $\theta_4 \geqq 5$

(8) $\theta_0 \geqq 3$, $\theta_1 \leqq 2$, $\theta_2 \geqq 6$, $\theta_3 = 6$, $\theta_4 = 8, 9$

(9) $\theta_0 \geqq 4$, $\theta_1 = 3$, $\theta_2 \geqq 6$, $\theta_3 = 6$, $\theta_4 = 9$

(10) $\theta_0 = 3$, $\theta_1 = 3$, $\theta_2 \geqq 7$, $\theta_3 = 6$, $\theta_4 = 9$

(11) $\theta_0 \geqq 4$, $\theta_1 \leqq 3$, $\theta_2 \geqq 7$, $\theta_3 = 7$, $\theta_4 = 9$

(12) $\theta_0 \geqq 5$, $\theta_1 \leqq 5$, $\theta_2 \geqq 10$, $\theta_3 = 11$, $\theta_4 = 14$

である index set $\{\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_4\}$ を持つ BA$(n, 6, 2, 4)$ は存在し，nonsimple balanced array である。

定理3.6.

(3.3) を満たさないような index set $\{\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_4\}$ を持つ BA$(n, 6, 2, 4)$ が存在するならば，同じ index set $\{\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_4\}$ を持つ simple BA$(n, 6, 2, 4)$ が存在する。

定理3.1, 3.3 と 3.5 の証明において，nonsimple balanced array の存在を保証するために，彼らは，定理2.2 の条件を

満足する次の非負の整数解を与えた。

| | | $V(0)$ | $V(1)$ | $V(2)$ | $V(3)$ | $V(4)$ | $V(5)$ | $V(6)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (3.1) | | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | | |
| (3.2) | (1) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | |
| | (2) | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| | (3) | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | |
| (3.3) | (1) | 0 | $u$ | $u$ | $u$ | $u$ | $u+1$ | $u+1$ |
| | (2) | $u$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | (3).(7) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| | (4) | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| | (5).(6) | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | (8) | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| | (9) | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| | (10).(11) | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | (12) | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

これらの解は定理2.4の条件をも満足しているので、我々は次の定理を得る。

定理 3.7.

$t=2.3.4$ の時、$BA(n,t+2,2,t)\{\mu_j\}$ が存在するならば、同じ index set $\{\mu_j\}$ を持つ semisimple $BA(n,t+2,2,t)$ が存在する。

## REFERENCES

[1] Kuriki, S. (1984). Existence conditions for balanced arrays of strength $t$, $t$+2 constraints and $s$ symbols. *TRU Math.* 20-1, 139-161.

[2] Kuriki, S. (1984). General existence condition for balanced arrays of strength $t$, $m$ constraints and $s$ symbols. *TRU Math.* 20-2, 191-211.

[3] Kuriki, S. and Yamamoto, S. (1984). Nonsimple 2-symbol balanced arrays of strength $t$ and $t$+2 constraints. *TRU Math.* 20-2, 249-263.

[4] Shirakura, T. (1976). Optimal balanced fractional $2^m$ factorial designs of resolution VII, $6 \leq m \leq 8$. *Ann. Statist.* 4, 515-531.

[5] Srivastava, J.N. (1972). Some general existence conditions for balanced arrays of strength $t$ and 2 symbols. *J. Combinatorial Theory* (*A*) 13, 198-206.

[6] Yamamoto, S., Kuriki, S. and Natori, S. (1984). Some nonsimple 2-symbol balanced arrays of strength $t$ and $t$+2 constraints. *TRU Math.* 20-2, 225-228.