数理解析研究所講究録
第 568 巻 1985 年 94-108

Some aspects of uniformization theory in several complex variables

G.D. Mostow (Yale大)
沼谷賢治 記

Genusが1より大きく、compactな複素曲線Mを考えよう。すると、そこへは、複素平面$\mathbb{C}$の中の単位球面Dからのorbit mapが存在する。

Compactな Kähler曲面Mと、$\mathbb{C}^2$の中の単位球体B^2に対して、同じ様なことは成り立つだろうか？

予想 (Yau 1979). Compactな Kähler曲面Mが、strictに負な断面曲率を持てば、Mは離散群ΓによるB^2の商空間B^2/Γ、と双正則同型になるであろう。

この予想がなされた根拠と思われるものを、いくつか上げよう。

(I) 複素曲線Mを考えると、Gauss-Bonnetの定理から、

$$\int_M K_M \, dM = 2-2g$$

（ここで K_M は Gauss 曲率、g は Genus）、
が従う。よって、$K_M<0$ ならば、$g>1$ 。
このとき、M は uniformization をもつ。

(II)（Frankel 予想） n 次元 Kähler 多様体 M が、正の双正則断面曲率をもつならば、M は $\mathbb{C}P^n$ と双正則同型である。

これは、
$n=2$ の場合、Aubin-Frankel によって 1941 年に、
$n=3$ の場合、Mabuchi によって、
n：一般では、Mori (Ann. of Math) 1979
及び
Siu-Yau (Invent. Math) 1981
に解かれた。
（Mori は $T(M)$ が ample というより弱い条件しか仮定していない。）

しかし、この予想は正しくなかった。

<u>定理</u>(Mostow-Siu). Compact Kähler surface Mで、strictに負な断面曲率をもち、しかし、その普遍被覆空間がB^2と双正則同型でないものがある。

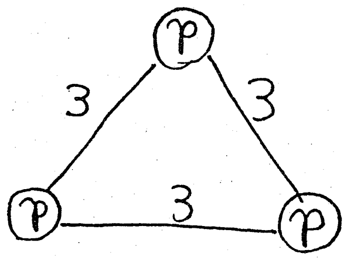
このMについては、次のことも分かる。

(I) Mは局所対称空間と可微分同相にはならない。

(II) Mは正のindexをもつ。

(III) Mの複素構造は自明でない変形をもたない。さらに強く、Mはrigidである。(つまり、Mと基本群が同型であるような全てのK(大い)複素多様体はMと双正則同型である。) (c.f. Kodaira J. Analyse Math. 1967 P207-215)。

以下 Mの構成等を行なう。まず
$U(2,1)$ の部分群 $T(p,t)$ を作る。



$V=\bigoplus_{i=1}^{3}\mathbb{C}e_i$ とし、この上の hermit 内積
$\langle\ ,\ \rangle = H$ を、

。$\langle e_i, e_i\rangle = 1$

。$\langle e_1,e_2\rangle=\langle e_2,e_3\rangle=\langle e_3,e_1\rangle=\dfrac{\varphi}{2\sin(\pi/p)}$

$$(\varphi=e^{\sqrt{-1}\pi t/3})\ \left(|t|<\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)。$$

で定める。

$R_i:V\to V$ $(i=1,2,3)$ を、$v\in V$ に対して、

$$R_i(v)=v+(e^{2\pi\sqrt{-1}/p}-1)\langle v,e_i\rangle e_i$$

で定める。

$1\le i,j\le 3$ に対して、
$\Gamma_{i,j}$ を R_i と R_j で生成される群とし
$\Gamma(=T(p,t))$ を R_1,R_2,R_3 で生成され

る群とする。

Claim

(1) ∘ R_i は H を不変にする，つまり

$$\langle R_i(v), R_i(w)\rangle = \langle v, w\rangle。$$

∘ H の signature は $(2,1)$。

∘ 従って，$\Gamma \subset U(H) = U(2,1)$.

(2) $3 \leqq p \leqq 5$ ならば，Γ_{ij} は order が $24(p/(3-p))^2$ の有限群である。

（注，$p \geqq 5$ である場合は，Γ_{ij} は有限群ではない。この場合はある "Classical object" と関係がある。）

$\mathbb{C}h^2$ の Model. X, を作る。

∘ $V_- = \{v \in V \mid \langle v, v\rangle < 0\}$

∘ $X = V_- / \mathbb{C}^*$， とする。

（X は $\mathbb{C}P^2$ の部分集合である。）

X は $\mathbb{C}h^2$ と isometric で，その距離関数は，$\nu: V_- \to X$ を projection とすると，

$$d(\nu(v),\nu(w)) = \cosh^{-1}\left\{\frac{|\langle v,w\rangle|}{[\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle]^{1/2}}\right\}$$

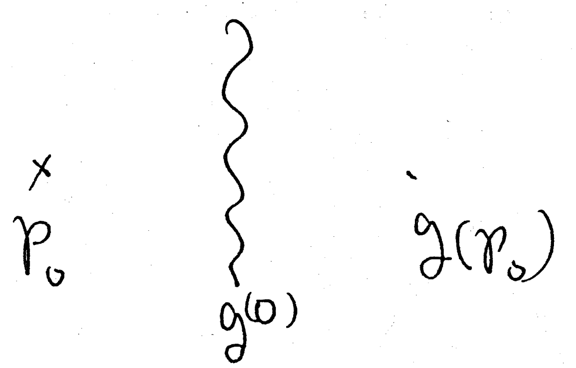
で与えられる。

さて、$p_0=\nu(e_1+e_2+e_3)$ とおく。

$g\in U(H)$ に対して、次のように $g^{(+)}$, $g^{(0)}$ を定める。

$$g^{(+)} = \{x\in X \mid d(x,p_0) = d(g(x),p_0)\}$$
$$g^{(0)} = \{x\in X \mid d(x,p_0) = d(g(x),p_0)\}。$$

$g^{(0)}$ はまっすぐ(全測地的)ではない。



$g\in U(H)$ に対して、明らかに、

$g(g^{(0)}) = (g^{-1})^{(0)}$、が成り立つ。

$i,j\in\{1,2,3\}$, $i\neq j$ に対して、

$$F_{ij} = \bigcap_{g \in \Gamma_{ij}} g^{(+)}$$ とし、

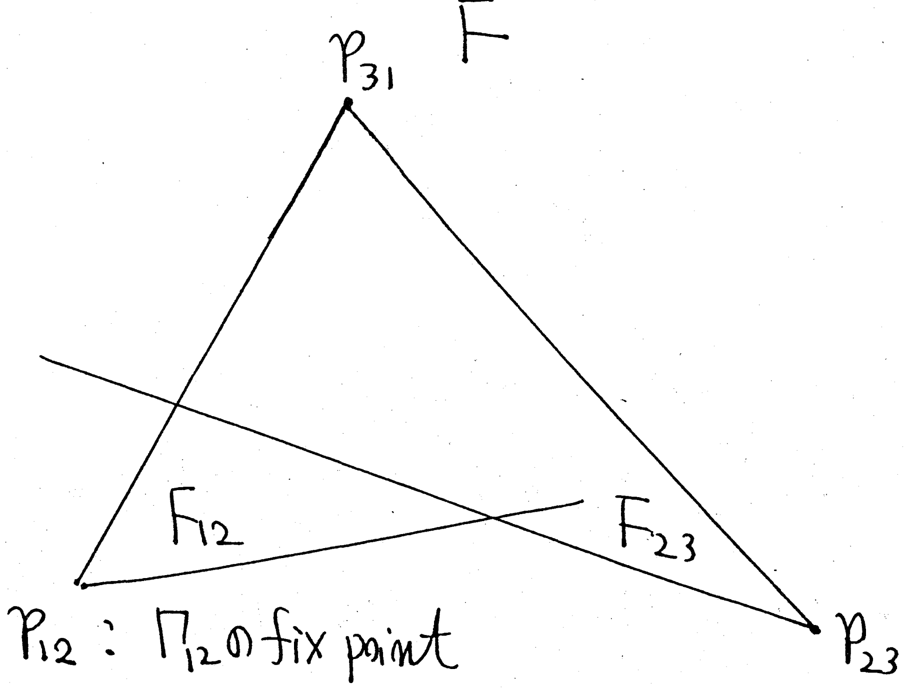
$F = F_{12} \cap F_{23} \cap F_{31}$ とする。

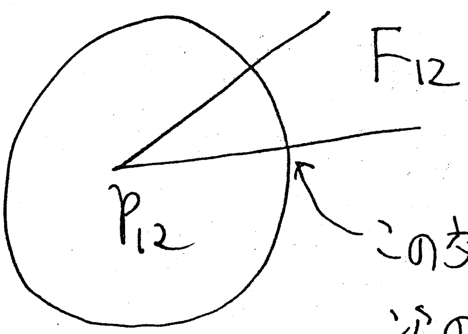
又、$g^{(0)} \cap F$ を $\tilde{g}$ と書く。

Fは、次の24個の面をもつ。

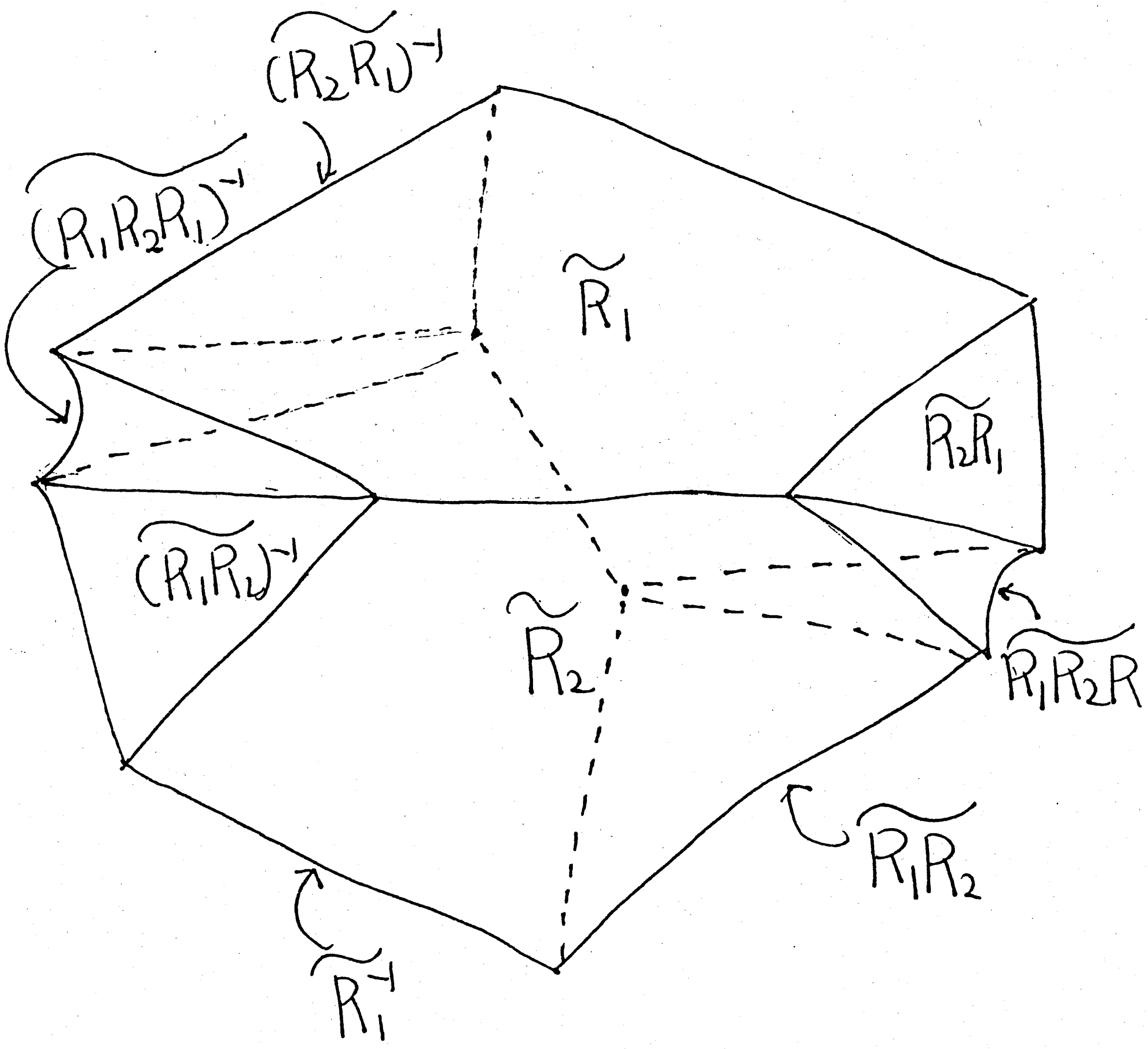
- $\widetilde{R_i^{\pm}}$ $(i=1,2,3)$
- $\widetilde{(R_i R_j)}^{\pm}$ $((i,j)=(1,2)(2,3)(3,1),(2,1),(3,2),(1,3))$
- $\widetilde{(R_i R_j R_i)}^{\pm}$ $((i,j)=(1,2)(2,3)(3,1))$。

$(R_i R_j R_i = R_j R_i R_j$ である$)$。

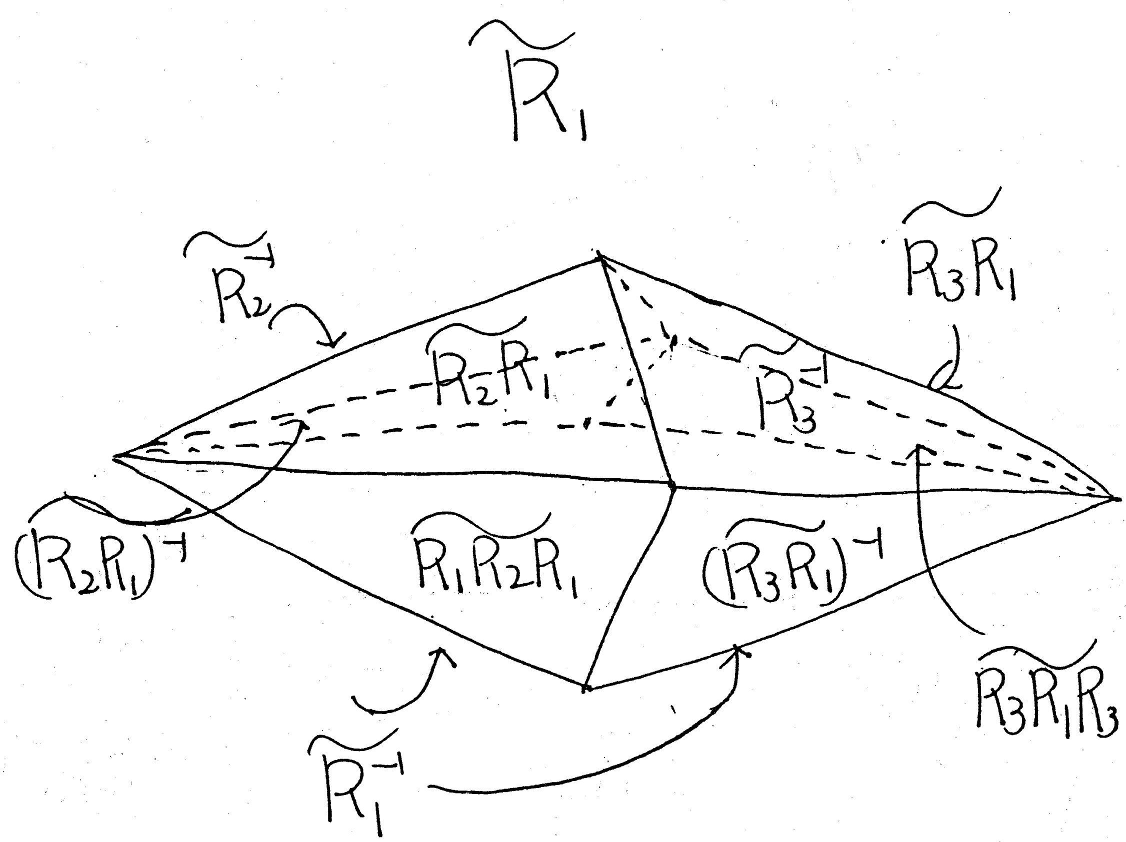


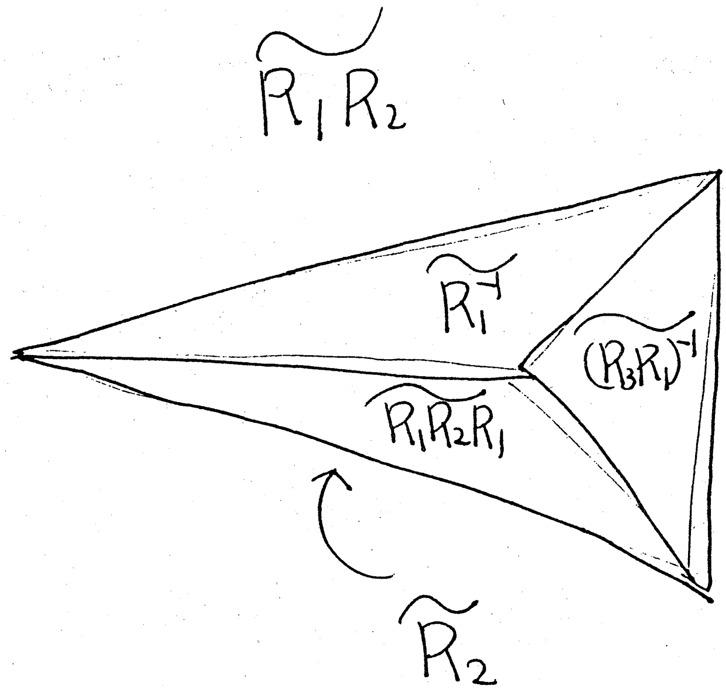


この交りの部分($\subseteq S^3$)の絵は次の通り.

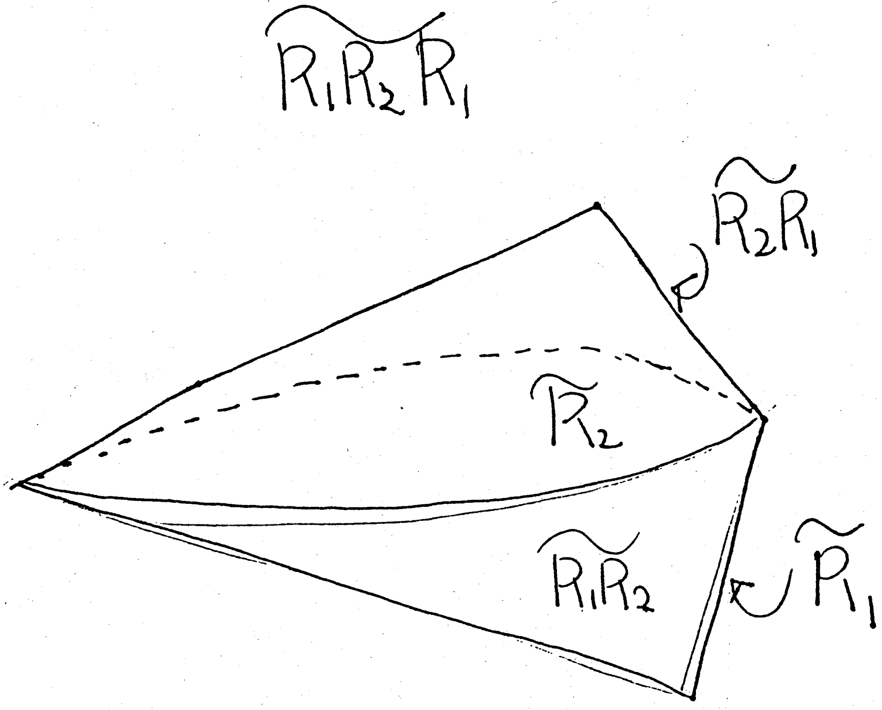


次に3種類のfaceは次のような形をしている。(面に書いた記号はその面で交わっている他のfaceを指す)。





$\widetilde{R_1 R_2}$
$\widetilde{R_1^{-1}}$
$\widetilde{(R_3R_1)^{-1}}$
$\widetilde{R_1R_2R_1}$
$\widetilde{R_2}$



$\widetilde{R_1R_2R_1}$
$\widetilde{R_2R_1}$
$\widetilde{R_2}$
$\widetilde{R_1R_2}$
$\widetilde{R_1}$

定理　勝手な (Γ, t) に対して，F は条件 (CD 1) を満たす。

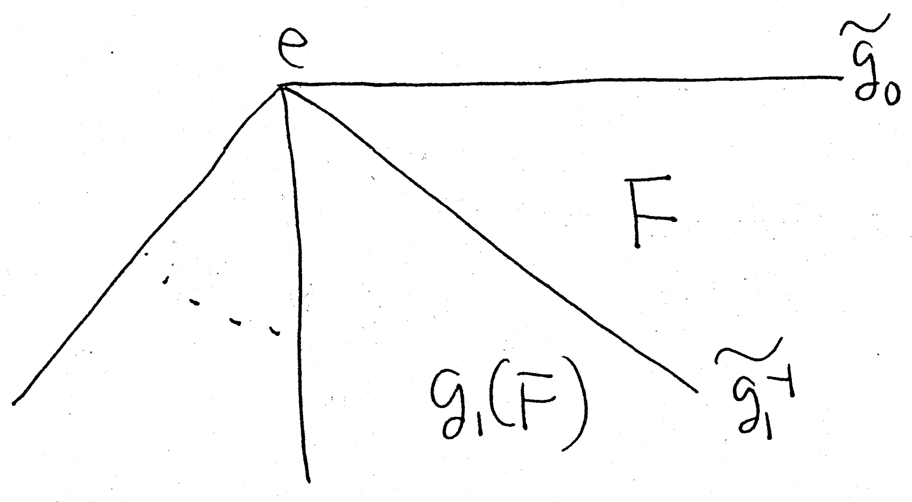
(CD 1) とはおおよそ次のような意味である。「$g \in \bigcup \Gamma_{ij}$，$\tilde{g}$ は F の余次元が 1 の face，とすると，$g(\tilde{g}) = \tilde{g}^{\dashv}$。」

定義　e．を F の余次元 2 の face とする。このとき，

e での circuit は good．

$\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \mathrm{Int}\{(g_1 g_2 \cdots g_n(F)) \cap F\} \neq 0 \\ g_i(e) = e \end{cases}$

なる勝手な $g_1 \cdots g_n$ に対して，$g_1 g_2 \cdots g_n(F) = F$。



定理

- 全ての余次元2のfaceでcircuitがgood
  $\Longleftrightarrow$ ΓはSU(2,1)の離散部分群。
- このとき、Fはmod Aut FでΓの基本領域である。
  (Aut Fは1又は$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$で後者のときは番号のcyclicな入れ替え$1\to2\to3\to1$に対応する。)

この定理の条件は17個の(p,t)について満たされる。
(これらの内のいくつかはSU(2,1)のnon arithmetic latticeになる)。

離散部分群にならない場合も考える。
まず、3つの頂点p_{12}, p_{31}, p_{23}のどれかと交わっているような余次元2のface eについては、そこでの

circuit は全ての (r, t) に対して good である。3頂点のどれとも交わらない、余次元2の face は次の6つである。

$I_1 = (R_2R_3R_1)^2$ の fix pt. 。

$I_2 = (R_1R_2R_3)^2$ 〃 。

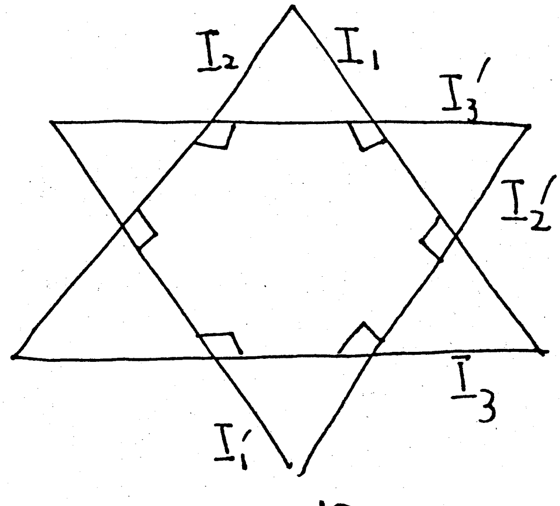
$I_3 = (R_3R_1R_2)^2$ 〃 。

$I_1' = (R_1R_3R_2)$ 〃 。

$I_2' = (R_3R_2R_1)^2$ 〃 。

$I_3' = (R_2R_1R_3)^2$ 〃 。

これらの交わり方は、



これらの回りで，
$g_1 \cdots g_n(F) \cap F \neq \phi \Rightarrow g_1 \cdots g_n(F) = F$
ではないが，かわりに，
$g_1 \cdots g_n(F) \cap F \neq \phi \Rightarrow (g_1 \cdots g_n)^m(F) = F$
となるようにすることが出来る（$t \in \Phi$ とき。）
すると，Γが作用する複素多様体Yと，
YからCh^2へのΓ-不変な正則写像fで，
。群ΓのYへの作用はproperly disconti.
。$\Gamma \cdot \{f^{-1}(I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_1' \cup I_2' \cup I_3')\}$の外では$f$は双正則。
。$\Gamma \cdot (I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_1' \cup I_2' \cup I_3')$の上では$f$はlocalに
$(z_1, z_2) \to (z_1^{m_1}, z_2^{m_2})$の形をしている。
なる3条件をみたすものがとれる。

Yに，負曲率計量を入れる。

I_1, I_2, I_3 の回りの circuit は good
I_1', I_2', I_3' の回りの circuit は bad,
である場合を考える。
このとき, $Y - f^{-1}(I_1' \cup I_2' \cup I_3')$ の外では,
f によって $\mathbb{C}h^2$ の metric から induce
される metric を Y に入れ,
$f^{-1}(I_1' \cup I_2' \cup I_3')$ の近傍では, それ
と, 領域 $\{(z_1, z_2) \mid |z_1|^{2m} + |z_2|^2 < 1\}$
の Bergman 計量をたし合わせた metric
を入れる。こうして得られた Y の
metric は負曲率で, Y/Γ が求
めるものである。(これの普遍
被覆が Ball B^2 ではないこと
は特性類を計算することで
示す。)

G. D. Mostow, Pacific. J. Math. 86 171–276
G. D. Mostow – Y. T. Siu, Ann. of Math. 112, 321–360