数理解析研究所講究録
第568巻 1985年 150-158

ある種のHyperbolic 3-manifoldの変形空間について

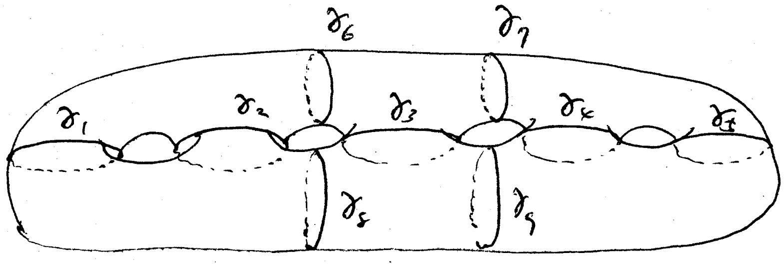
岡山大理 吉田朋好 (Tomoyoshi Yoshida)

Sを種数 $g \geqq 2$ の向きづけ可能な閉曲面とし、$f: S \to S$ を pseudo-Anosov 写像とする。M_f で f の mapping torus をあらわす。すなわち

$$M_f = S \times [0,1] \,/\, (x,0) \sim (fx,1) \qquad (x \in S)。$$

Thurston-Sullivan の定理([ ])により、M_f は完備双曲構造をもつ(このことは後の議論には必要ない)。

$\gamma = \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_{3g-3}$ を $3g-3$ コの S 上の simple closed curves の disjoint union で S を $(2g-2)$ コの 3-punctured spheres (pantalon) にわけるものとする。



$g=4$

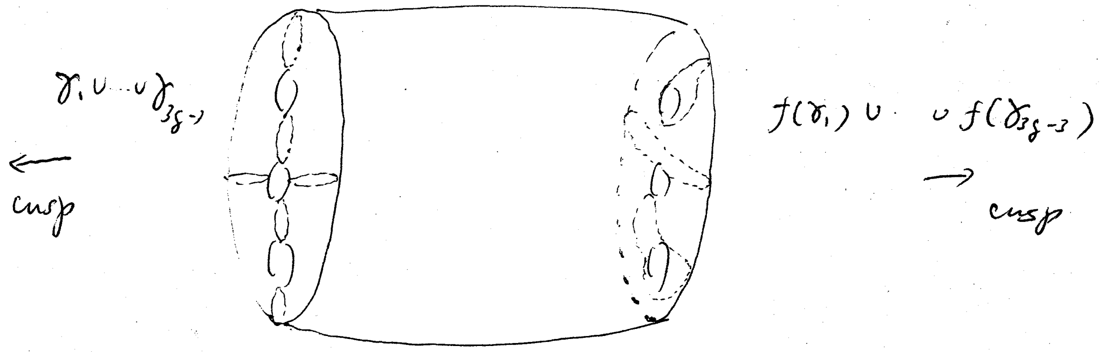
$i : S \longrightarrow M_f$ を $i(x) = (x, 0)$ $(x \in S)$ で定義される inclusion とし, i による γ の像 $i(\gamma)$ を同じく γ であらわす.

$$N_f = M_f - \gamma$$

とおく。N_f は $3g-3$ コの toral end をもつ3次元の open manifold であるが、いわゆる atoroidal Haken 3-manifold となり、Thurston の怪物定理([ ], [ ])から $(3g-3)$ コの cusps をもつ有限体積完備双曲多様体となる。このことは、しかし、Thurston の定理によらずとも Bers, Maskit 等、関数論の人達の quasi-Fuchs 群の変形の極限としてあらわれる accidental parabolics をもつ群についての結果からもわかることである。すなわち Maskit [ ] によれば $\pi_1(S)$ と同型な quasi-Fuchs 群の極限である幾何的有限 Klein 群で $6g-6$ コの S 上の loop $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{3g-3}, f(\gamma_1), \dots, f(\gamma_{3g-3})\}$ が accidental parabolic になるようなものが存在する。この Klein 群の limit set の H^3 での凸包の商空間は凸双曲空間で位相的には

$$S \times [0,1] - \underset{(S \times \{0\}\text{上})}{\{\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_{3g-3}\}} - \underset{(S \times \{1\}\text{上})}{\{f(\gamma_1) \cup \cdots \cup f(\gamma_{3g-3})\}}$$

と同相である



各々の $S\times\{0\}-\gamma$ の pantalon は f によって $S\times\{1\}-f(\gamma)$ の pantalon の一つに対応し これらの pantalon の基本群は 上の Klein 群の中で (∞,∞,∞) 型の3角形群 ($\subset H^2$ の isometry 群) に対応するので 3角形群についての rigidity から 対応する pantalon 同志をはりあわせることにより, $N_f = M_f - \gamma$ の有限体積完備双曲構造が得られる。

そこで Thurston [ ] にのっとり N_f の双曲構造の変形空間を考えることができる。この変形空間は自然な複素構造をもち $\mathbb{C}$ 上の次元は $(3g-3)$ である。[ ] の hyperbolic Dehn surgery の理論から, N_f の双曲構造の変形により, M_f を γ にそって Dehn surgery した多様体で、完備双曲構造をもつものが沢山得られる。M_f を γ にそって Dehn surgery したものは位相的にややこしいものが多いが、わかりやすいものもある

まず M_f 内での $\gamma_1, \cdots, \gamma_{3g-3}$ の tubular neighborhood $N_1, \cdots, N_{3g-3}$ の境界 $\partial N_1, \cdots, \partial N_{3g-3}$ 上に meridian-longitude pair $(m_1, l_1), \cdots, (m_{3g-3}, l_{3g-3})$ を'自然に'とる'自然に'とは $S \times [0,1]$ の積構造から自然に定まるという意味で 各 l_i は γ_i に'平行'である 各 i で $p_i m_i + q_i l_i$ ((p_i, q_i) は互いに素な整数の対 又は $(\pm 1, 0)$ 又は $(0, \pm 1)$) に対応する homotopy class を消すように Dehn surgery したものを $M_{(p_1,q_1), \cdots, (p_{3g-3}, q_{3g-3})}$ とあらわすことにする。次のことはみやすい。

- $M_{(1,0), \cdots, (1,0)} = M_f$
- $M_{(0,1), \cdots, (0,1)} = H_f \# \underbrace{(S^1 \times S^2) \# \cdots \# (S^1 \times S^2)}_{(2g-2)^2}$

  ここに H_f は f であらわされる Heegaard splitting であらわされる3次元多様体. すなわち

  $H_f = B \cup_f B \qquad B =$ genus g の handle body

- $M_{(1,q_1), \cdots, (1,q_{3g-3})} = M_{f \tau_{\gamma_1}^{q_1} \cdots \tau_{\gamma_{3g-3}}^{q_{3g-3}}}$

  ここに $\tau_{\gamma_i}^{q_i}$ は γ_i にそう Dehn twist τ_{γ_i} の q_i 回の iterates で $f \tau_{\gamma_1}^{q_1} \cdots \tau_{\gamma_{3g-3}}^{q_{3g-3}}$ はこれらと

f の結合で $M_{f\tau_{\gamma_1}^{g_1}\cdots\tau_{\gamma_{3g-3}}^{g_{3g-3}}}$ はその mapping torus をあらわす。

hyperbolic Dehn surgery の理論から $|g_1|, \cdots, |g_{3g-3}|$ が十分大のとき、つねに $f\tau_{\gamma_1}^{g_1}\cdots\tau_{\gamma_{3g-3}}^{g_{3g-3}}$ は pseudo-Anosov、でかつ $M_{f\tau_{\gamma_1}^{g_1}\cdots\tau_{\gamma_{3g-3}}^{g_{3g-3}}}$ の体積は（f を固定したとき）有界であることがわかる。この体積の評価は $\langle\gamma_1, \cdots, \gamma_{3g-3}\rangle$ と $\langle f\gamma_1, \cdots, f\gamma_{3g-3}\rangle$ の幾何的交叉数により与えることができるがここでは省く。

又 $M_{(0,1), \cdots, (0,1)}$ は f による Heegaard 分解 H_f と $(2g-2)$ コの $S^1\times S^2$ の連結和にかかれる。そこで余分な $S^1\times S^2$ の factor を除いて考えるために、N_f の変形空間をファイバーの曲面 S に制限する。$j: S\to S\times\{t\}\subset N_f$ を inclusion とし、$j_*: \pi_1(S)\longrightarrow\pi_1(N_f)$ を j により誘導される準同型写像とする。$\pi=\pi_1(S)$, $\Gamma=\pi_1(N_f)$ とおき、π, Γ から $SL_2\mathbb{C}$ への表現の同値類全体を各々 $X(\pi)$, $X(\Gamma)$ とする。j_* から写像 $j^\#: X(\Gamma)\longrightarrow X(\pi)$ が得られる。[ ] により $X(\pi)$, $X(\Gamma)$ はともに complex affine variety で $\mathbb{C}$ 上の次元は各々 $6g-6$, $3g-3$ である。$j^\#$ は affine variety の

単射 morphism で $X(\Sigma)$ は $X(\pi)$ の affine subvariety であり，代数等式

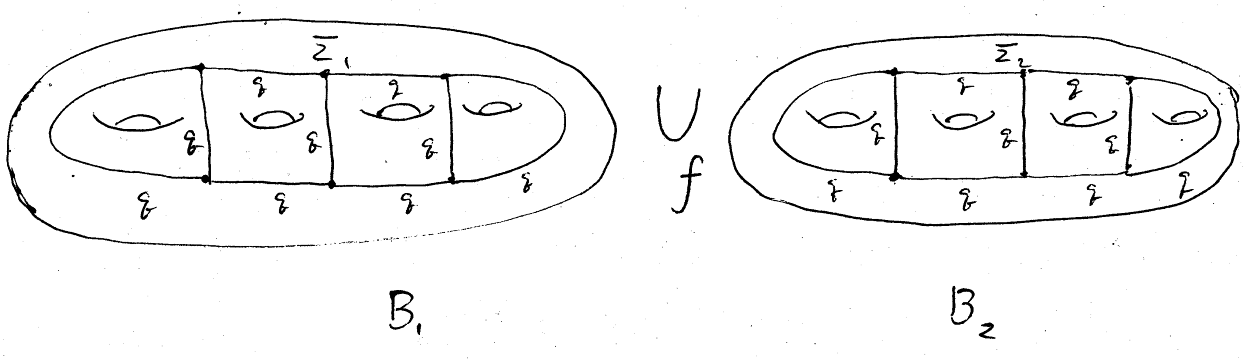
$\{\mathrm{tr}\,\rho(\gamma_i) = \mathrm{tr}\,\rho(f\gamma_i)\ ,\ \rho\in X(\pi),\ i=1,\cdots,3g-3\}$

で特徴づけられる。$X(\pi)$ は surface 群の $SL_2\mathbb{C}$ への表現空間で mapping class group が自然に作用し，いろいろ豊かな性質を内に含んでいると思われる。従って $X(\Sigma)$ を直接みるよりも，それを $X(\pi)$ の中の subvariety としてみた方がより有効である。

Thurston による双曲構造の変形空間の理論を N_f に適用し，それから H_f についての情報を得たいというのが筆者の希望である。N_f の変形空間は $X(\Sigma)$ のある open set となりそれを $X(\pi)$ にうめこんでみてみる。$X(\pi)$ は surface 群 π から $SL_2\mathbb{C}$ への表現全体であるが，それらのうち比較的よく調べられているのは Fuchs 群と Quasi-Fuchs 群である。Fuchs 群は π から $SL_2\mathbb{R}$ への discrete 表現であり，Quasi-Fuchs 群はそれを $SL_2\mathbb{C}$ の中で変形したものである。Quasi-Fuchs 群の全体を QF とおくと，QF は $X(\pi)$ の open set となる。$X(\pi)$ での QF の閉包を $\overline{QF}$ とし $\partial(QF) = \overline{QF} - QF$ とおく。$\partial(QF)$ が $X(\pi)$ の中のどういう集合かは大変むつかしい問題で

主として関数論の人々により調べられてきたが、まだ未知の部分が沢山ある。当然のことながら $\overline{QF}$ の補集合 $X(\pi)-\overline{QF}$ の様子については殆んど何も知られていない。

$X(\Gamma)$ の $\overline{QF}$ が compact であることは Thurston の acylindrical manifold の変形についての理論からわかる。$X(\Gamma)$ の QF の様子は比較的わかりやすい。N_f の完備双曲構造に対応する $X(\Gamma)$ の点、つまり $M_{\infty,\dots,\infty}$ に対応する $X(\Gamma)$ の点は $X(\pi)$ でみると、∂QF 上にある。H_f についての情報を得るためには、$M_{\infty,\dots,\infty}$ から $M_{(0,1),\dots,(0,1)}$ にいたる path を変形空間内にとり、それを追跡する必要があるが、この path はもちろん $X(\pi)-\overline{QF}$ の中にはみだして行く。比較的扱いやすいと思われる path の候補は $M_{(0,g),\dots,(0,g)}$, $(0,1)\leq(0,g)\leq(0,\infty)$ である。g が整数のとき、これは次のような orbifold に対応する。



ここに B_1, B_2 は各 genus g の handlebody で Σ_1, Σ_2 は各 B_1, B_2 の内部にうめこまれた図のような1次元 complex である。Σ_1, Σ_2 がこの orbifold の singular locus で各分枝の weight はすべて g である。(g, g, g) 型の3角形群についての事実を使ってゆくと、$g \geqq 4$ のとき、この orbifold は hyperbolic structure をもつことがわかる。又、例えば S^3 の genus 2 の標準的な Heegard 分解（このとき f は pseudo-Anosov ではないが）でやってみると、この場合にはこの orbifold の geometric structure は $\mathbb{H}^3$ と S^3 内の多面体を用いて完全に追跡することができる。$g=3$ で一般の場合にどうなるかは何もわからない。
今までのところは f を固定しているが、ここで f を動かし、$X(\pi)$ 上の mapping class group の作用の様子を調べれば もっとよくわかるはずであるが、今のところ何も得られていません。

References

[1] J. W. Morgan & H. Bass, The Smith Conjecture, Academic Press, 1984

[2] B. Maskit, Parabolic elements in Kleinean Groups, Ann of Math. 117 (1983), 659-668

[3] D. Sullivan, Travaux de Thurston sur les groupes Quasi-Fuchsiens et les variétés hyperboliques de dimension 3 fibrées sur S^1. Springer Lecture Note 842, 196-214

[4] W.P. Thurston, The geometry and topology of 3-manifolds, Princeton Note 1978