数理解析研究所講究録
第575巻 1985年 17-27

On Graphs and Ball Coverings of 3-Manifolds

相模工大　津久井康之 (Yasuyuki Tsukui)

3次元多様体をGraphで表現するいくつかの方法がある。ここでは3-manifoldのniceなball coveringを通して得られる4-regular Graphとedge 4 colouringについて報告する。残念ながら、甘い期待が裏切られたという報告となった。

§1. nice ball covering と bone

連結なclosed 3-manifold Mがconnected sumに関して $S^1\times S^2$ 及び $S^1\times_\tau S^2$ (S^1上のtwisted S^2-bundle) をfactorとして持たないとき、handle freeと呼ぶ。
(i.e. $M\neq M'\# S^1\times S^2$, $M\neq M'\# S^1\times_\tau S^2$)

$B_1^3\cup\cdots\cup B_k^3=M^3$ で $B_i^3\cap B_j^3=\partial B_i\cap\partial B_j$ は2-manifold ($i\neq j$) のとき $\mathcal{B}=\{B_1,\cdots,B_k\}$ をMのball coveringといい、kのminimumを $b(M)$ と記しMのcovering numberという。

M^3がnon-trivial ($M \neq S^3$) でhandle freeのときは $b(M)=4$ で、常に $B_i \cap B_j = \partial B_i \cap \partial B_j$ はfinite 2-disksとなる。

$B_i \cap B_j \supset D_1^2$, $B_k \cap B_l \supset D_2^2$ が2-disk components ($i \neq j$, $k \neq l$) のとき $D_1 \neq D_2$ なら

$$D_1 \cap D_2 = \begin{cases} \phi \\ \text{points} \\ \text{arcs} \end{cases} \text{のどれか}$$

であるが $D_1 \cap D_2 = \text{arcs}$ のときは幾何的な操作でball covering $\mathcal{B}$ をより構造の簡単なball coveringに変えることができる [1,2]。

結局closedなhandle free 3-manifoldに対しては

$$D_1 \cap D_2 = \begin{cases} \phi & \text{or} \\ \text{points} & \text{or} \\ \text{an arc} \end{cases}$$

とできる。これを*nice*な*ball covering*という。

M^3 のball covering $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ に対して

$\mathcal{B}^3 = \mathcal{B}$, $\mathcal{B}^2 = \{D \mid B_i \cap B_j \supset D^2 \text{ 2-disk component } i \neq j\}$

$\mathcal{B}^1 = \{A \mid B_i \cap B_j \cap B_k \supset A \text{ arc component } i<j<k\}$

$\mathcal{B}^0 = \{p \mid B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \supset p \text{ point}\}$

とするとき $\mathcal{B}$ が*nice*なら $\mathbb{B} = (\mathcal{B}^0, \mathcal{B}^1)$ は*simple-Graph*となる。$\mathbb{B} = \mathbb{B}(\mathcal{B}) = \mathbb{B}(M, \mathcal{B})$ を M の*b-bone*と呼ぶ。

§2 b-bone の性質

Graph $G=(V,E)$ が 3-manifold M の b-bone であるとき次の性質(＊)をもつ。

(＊)

(1) G は simple quartic (4-regular), nonplaner

(2) G は edge 4-colourable : $c: E \to \{1,2,3,4\}$ を1つの colouring とすると

(3) $\overline{G}_i = (V, E - c^{-1}(i))$ は planer graph で S^2 への embedding は unique

(4) $\overline{G}_{ij} = (V, E - c^{-1}(\{i,j\}))$ は有限 k 個の cycle で各 cycle は ∂B_k^3 上で互いに~~内部~~交わらない k 個の 2-disk を bound する ($i \neq j$, $i \neq k \neq j$).

(5) $\#\overline{G}_{ij} = \#\overline{G}_{kl}$ (components の個数), $\{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}$

$G=(V,E)$ が b-bone のとき $c: E \to \{1,2,3,4\}$ を

$c(e) = i$ if $e \not\subset \partial B_i$ $(e \subset B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap B_{i_3}$ $i_1 < i_2 < i_3)$

と定めると $\overline{G}_i$ は 3-regular planer $(\subset \partial B_i)$.

~~eg~~ edge 3-connected 故 embedding は unique.

$\overline{G}_{ij} = \{C_1, \cdots, C_k\}$ (C_i: cycle) とすると

$|C_1 \cup \cdots \cup C_k| = \partial(B_k \cap B_l) = \partial(D_1^2 \cup \cdots \cup D_m^2) \subset \partial B_k, \subset \partial B_l$

(但し $\{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}$.)

また $(B_i \cup B_j,\ B_k \cup B_\ell)$ は M の Heegaard 分解を与えるから (5) が得られる。

このように handle free closed 3-manifold (S^3 を含む) M の nice な ball covering (常に存在. 一般に unique でない) $\mathcal{B}(M)$ に対して unique な b-bone $\mathbb{B}$ と edge colouring c が定まる。

逆に性質 (*) をもつ connected graph 全体を Q としたとき、Q の元 $G=(V,E)$ と (*) の (3)〜(5) を満たす G の edge colouring c, (G,c) に対して自然に 1つの ball covering $\mathcal{B}(G,c)=\mathcal{B}(M)$ と 3-manifold M が定まる。

nice ball covering と b-bone with colouring は 1-1 の関係にある。しかし 3-manifold 1つに対してたくさんの Q の元 (と colourings), bone 1つに対して (いくつかの colourings があって) たくさんの 3-manifolds という関係である。従ってこれらの関係がもっと整理されることが望まれる。

§ Connected sum と b-bone

quartic graph $G=(V,E)$ と $G'=(V',E')$ に対して、

$v \in V$, $vv_1, vv_2, vv_3, vv_4 \in E$, $v_i \neq v_j \neq v$ $(i \neq j)$

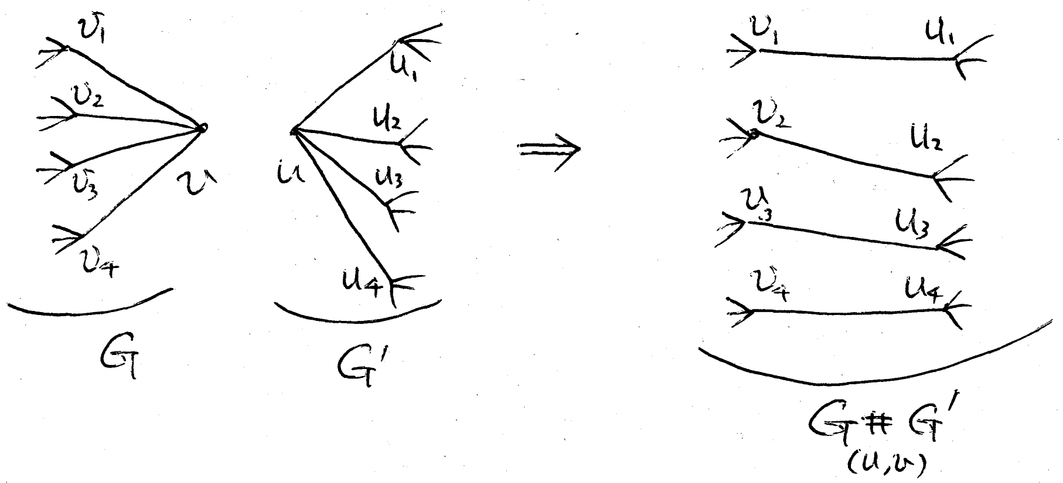
$u \in V'$, $uu_1, uu_2, uu_3, uu_4 \in E'$, $u_i \neq u_j \neq u$ $(i \neq j)$

とするとき

$$\underset{(v,u)}{G \# G'} = \left(V \cup V' - \{u, v\},\ E \cup E' - \{vv_i, uu_i \mid i=1,2,3,4\} \cup \{v_i u_i \mid i=1,2,3,4\}\right)$$

を G と G' の $((u, v)$ における$)$ sum と呼ぶ。

u_i, v_i の定め方で Graph の自由さが出る。



$\underset{(u,v)}{G \# G'}$ はまた (v, u) の選び方で異なるが、これらの任意の1つを $G \# G'$ で表わす。

edge colouring は一方のものを拡張すればよいから

$$G, G' \in Q \Longrightarrow G \# G' \in Q.$$

G を M^3 の b-bone G' を M' の b-bone とすると

$G \# G'$ は $M \# M'$ の b-bone となる。

nontrivial handle free 3-manifold M の degree を

$$\deg(M) = \min\{\#V(G) \mid G = G(M) : M \text{ の b-bone}\}$$

と定める。deg は homeo invariant.

☆ $\deg(M\# M') \leqq \deg(M) + \deg(M') - 2$

<粗な予想>: $\deg(M\# M') = \deg(M) + \deg(M') - 2$.

この予想を示すには, Heegaard splitting に対する Haken の定理 ($M \cong M_1 \# M_2 \rightarrow {}^{\exists}S^2$: M の Heegaard splitting を二つに分ける) と同種の命題: (ball cov.で)

◎ $\mathcal{B}$ が handle free $M \cong M_1 \# M_2$ の (nice) ball covering ならば ${}^{\exists}S^2 \subset M$: $S^2 \cap B_i \cong$ 2-disk $i=1,\cdots,4$, が成立すれば都合がよい。

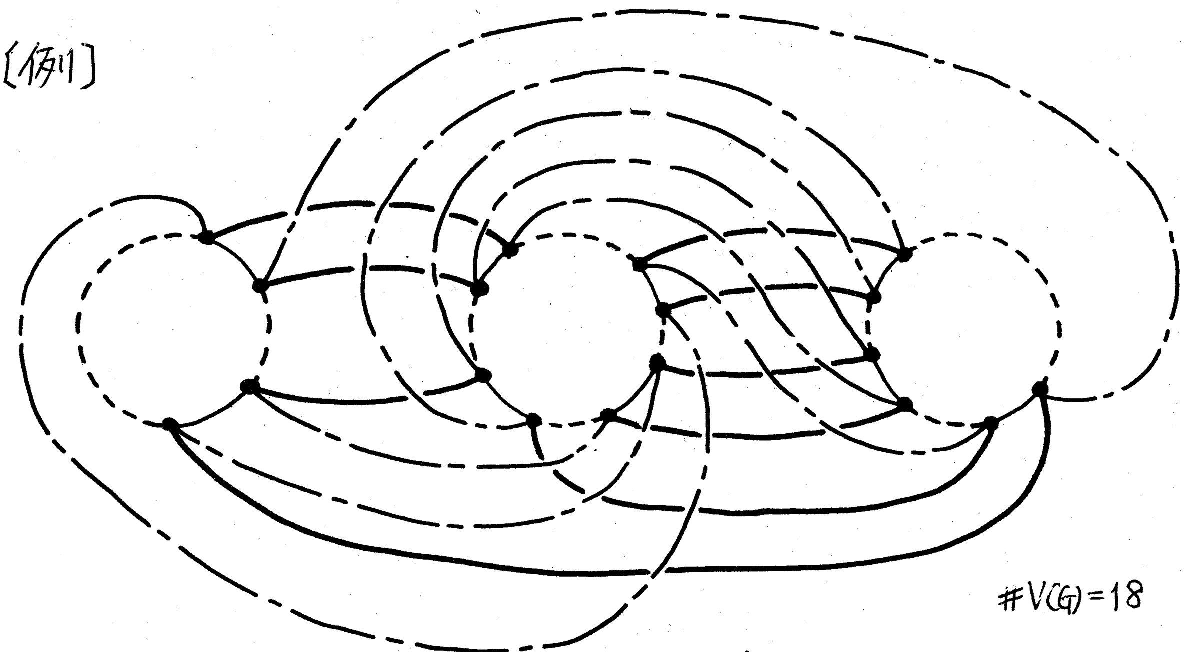
b-bone の場合に次は成立つ.

⊙ $G \in Q$ が essentially 5 edge-disconnected ならば $G \cong G_1 \# G_2$ (すなわち $M(G) \cong M_1 \# M_2$) または ${}^{\exists}G'$ ($\deg(G') < \deg G$) : $M(G) \cong M(G')$。

但し quatic graph (4 edge-connected) G が essentially 5 edge-disconnected とは「$E(G) \overset{\exists}{\ni} e_1, e_2, e_3, e_4$: $G' = (V(G), E(G) - \{e_1, e_2, e_3, e_4\})$ が disconn. でかつその2つの成分とも2つ以上の頂点を含む」ことである。(上のアンダーラインのまたは以下の場合は実際には起らないであろう)。

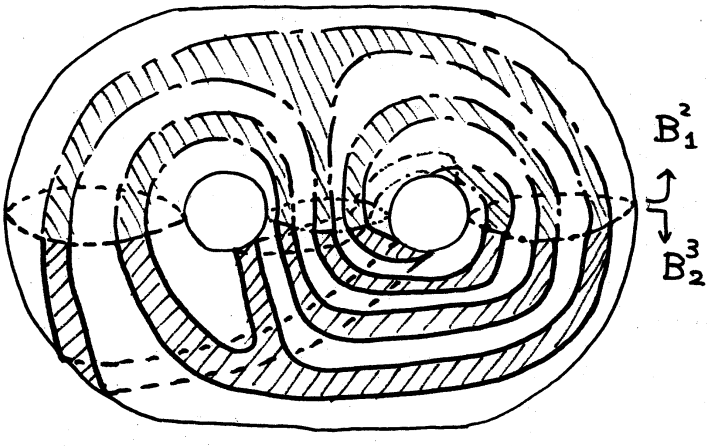
以下に、残念ながら◎が成立しないことを示す例をあげておく。◎のような S^2 の存在と $G(\mathcal{B})$ が essentially 5 edge-disconnected なこととは同値で、これを使う。

〔例〕



↑

b-bone G with edge 4 colouring (1 2 3 4)



← $\mathcal{B}=\mathcal{B}(G)$

Gから作られる Ball Covering

$B_1 \cap B_3$:

$B_2 \cap B_3$:

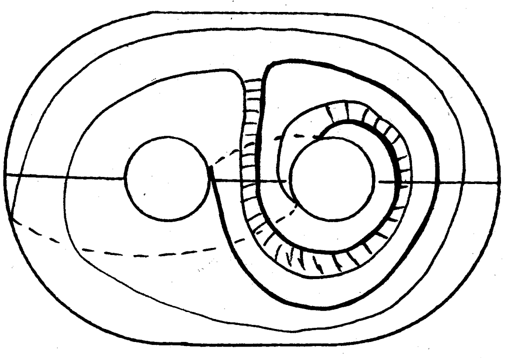
(B_3, B_4 省略)

$M^3(G) \cong P^3 \# P^3$

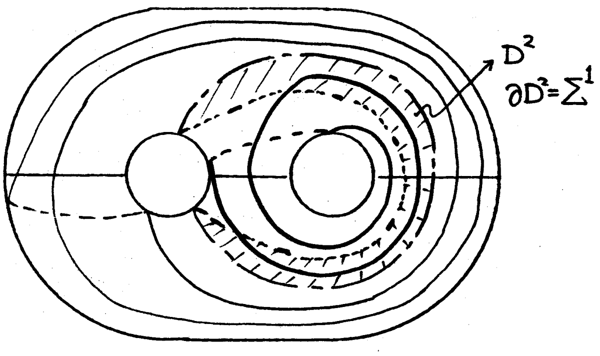
Heegaard Splitting (handle sliding)

↓ $\Sigma^1 = \partial D^2$ は splitting S^2 の一部

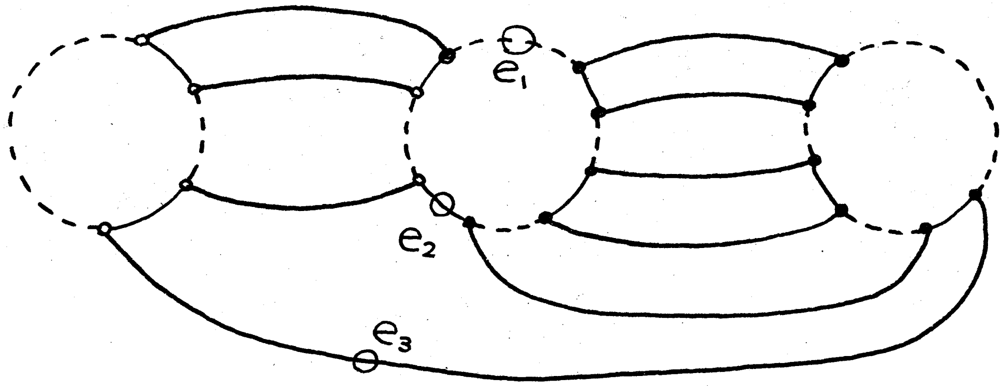
↓



→

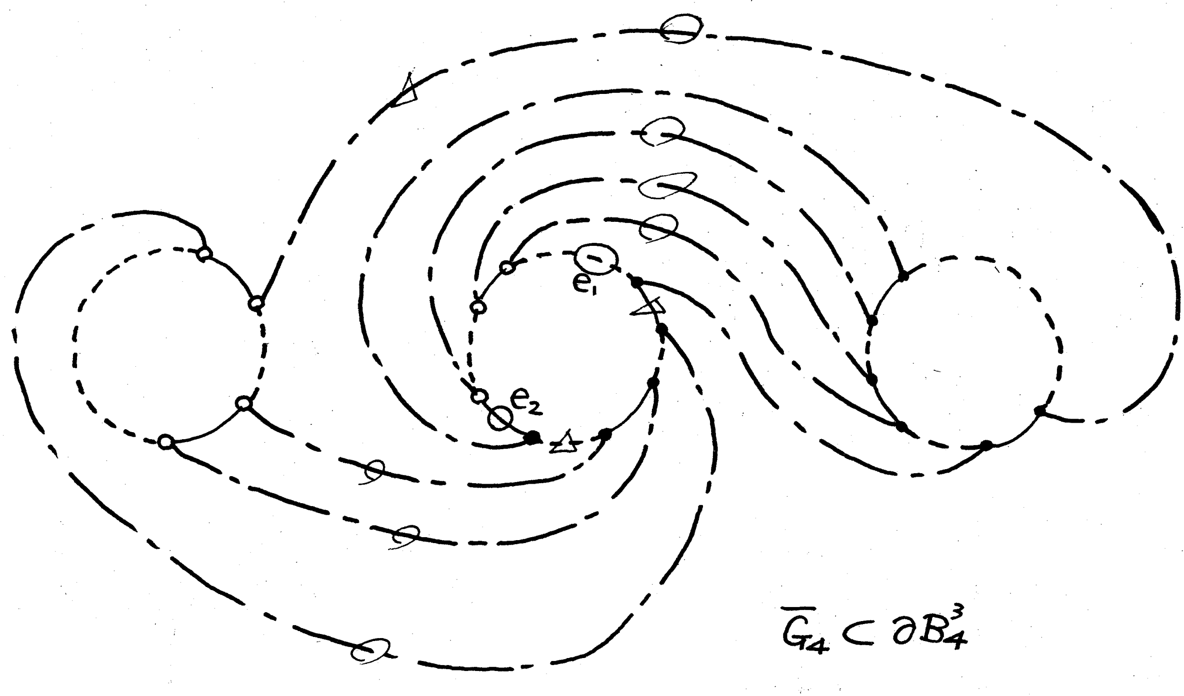


もし G が essentially 5 edge disconnect ならば $\overline{G_3}=(V, E-c^{-1}(3))$ は essentially 4 edge disconnected. $\overline{G_3}$ に対しては $\{e_1, e_2, e_3\}$ のみ。



$\overline{G_3} \subset \partial B_3^3$

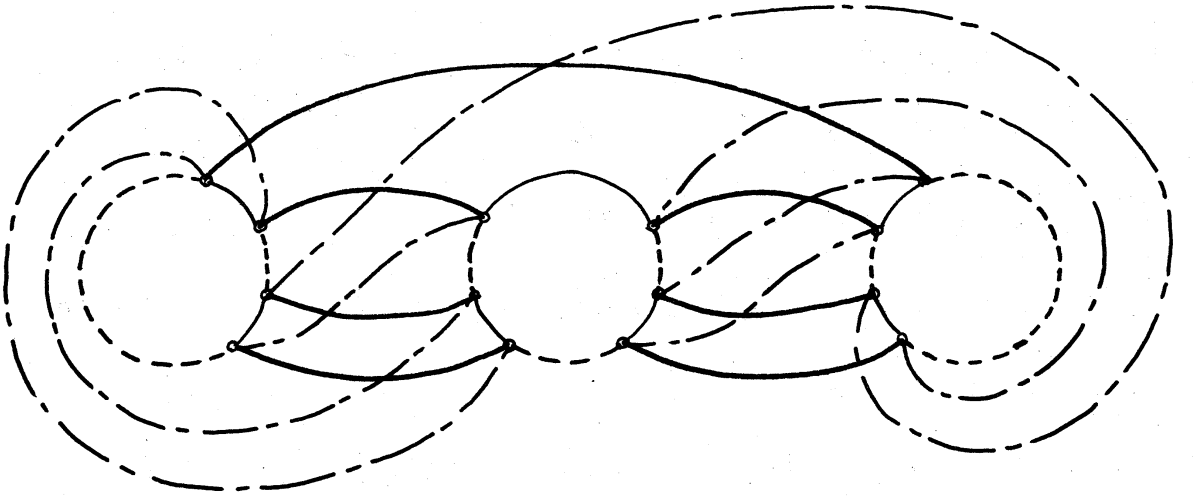
同様に $\overline{G_4}$ に対しては △印の3個. $\overline{G_4}$ で e_1, e_2 の他は $c^{-1}(3)$ の元では disconnect にするためには 7個必要.



$\overline{G_4} \subset \partial B_4^3$

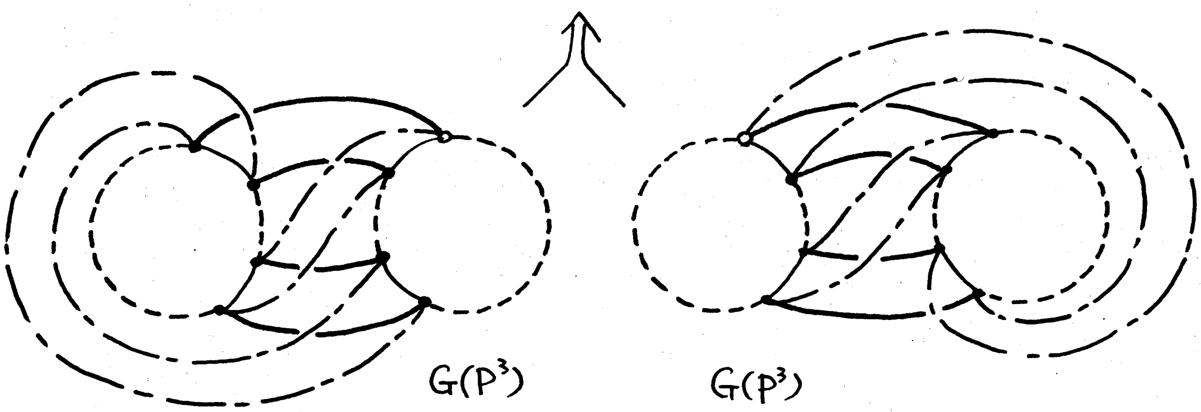
従って G は essentially 5 edge disconnect ではない。

故に G は ◎ の反例である。

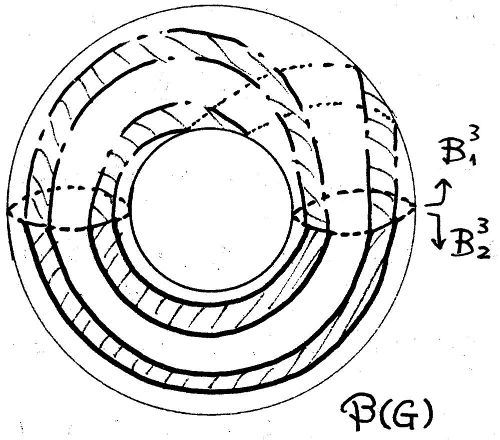


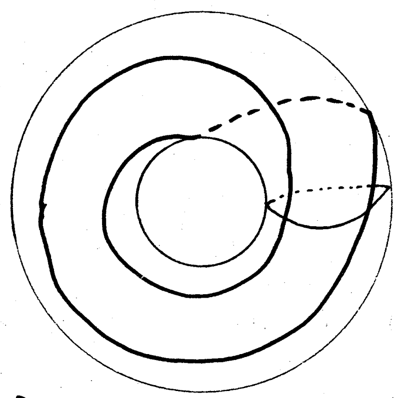
$\# V(G) = 14$

すなおな $G(P^3 \# P^3)$ の例



$G(P^3)$ $G(P^3)$





$\mathfrak{B}(G)$ $\longrightarrow$ P^3 の Heegaard Splitting

$B_1 \cap B_3$: \\\

$B_2 \cap B_3$: ///

Remarks.

1. *Heegaard Splitting* に関する *Haken* の定理の一部、次のような命題はまだ可能性がある。

△ M が *handle* を持つとき ($M \supset^{\exists} S^2$ $S^2 \nsim 0$).
M の *ball covering* $\{B_1^3, B_2^3, B_3^3, B_4^3\}$ に対して $\exists S^2 \subset M$、
$S^2 \cap B_i = \phi$ $i=1,2$, $S^2 \cap B_j \cong D^2$ $j=3,4$.

◎は 2-*manifold* に対しても成立しないが上の△は成立つ。

2. Q (4-*regular with property* ☆) の元の *sum* $G \# G'$ には *sum* 自身が 4 *colourable* という条件を付け加えなくてはならない。

3. *handle free closed 3-manifold* M^3 の *Heegaard-genus* $g(M)$ と *b-bone* には次のような関係がある。

$$1 + g(M) = \min \{ \min_{j=1,2,3} \# \overline{G_{4j}} \mid G = G(M) \text{ は } M \text{ の b-born} \}$$

handle free closed 3-manifold M の *Heegaard Splitting* $(M; V_1, V_2)$ ($V_1 \cup V_2 = M$, $V_1 \cap V_2 = \partial V_1 = \partial V_2$) が与えられると自然に *ball covering* $\mathcal{B}(M) = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ が得られて ($B_1 \cup B_2 = V_1$, $B_3 \cup B_4 = V_2$)、一般には $\deg \mathcal{B}'(M) \leqq \deg \mathcal{B}(M)$ なる $\mathcal{B}'$ がある。しかし *minimum genus* の *Heegaard-Splitting* から *minimum degree* $\deg(\mathcal{B})$ の *ball covering* (*b-bone*) が得られる保証はない。(*lens space* $L(p,q)$, $q>1$ ($L(5,3)$ ……) 等)。

4. b-bone G に対して $\overline{G}_i$ は常に bi-partite。

5. minimum degree $g(M \# M')$ をもつ b-bone (ball covering) に対しての ◎ の反例はいまのところ見つかっていない。

6. $M(G) \cong M(G')$ のときの G と G' の関係を調べるには nice ball covering の範囲ではむつかしい。

REFERENSES

[1] 津久井康之: "3-Manifold の Normal spine と Ball covering" 数理解析研究所 講究録 524 (1984)「多様体と Fake Surfaces」 p9-20.

[2] 津久井康之: "3-Manifolds, Spines and Graphs" 数理解析研究所 講究録 563 (1985)「Theory of Spines of 3-manifolds」 p84-90