数理解析研究所講究録
第 576 巻 1985 年 129-131

射影変換群について

落合 卓四郎

(M, g) を m 次元連結コンパクトRiemann多様体とする。Mの微分同相写像全体のなす群を$\mathrm{Diff}(M)$で表わす。$\mathrm{Diff}(M)$には所謂コンパクト開位相を導入しておく。Riemann計量gのLevi-Civita接続を${}^g\nabla$で表わす。このとき次のようにして$\mathrm{Diff}(M)$の部分群$\mathrm{Iso}(M, g)$, $\mathrm{Conf}(M, g)$, $\mathrm{Aff}(M, g)$, $\mathrm{Proj}(M, g)$が定義される:

$$\mathrm{Iso}(M, g) = \{ f \in \mathrm{Diff}(M) ;\ f^*g = g \},$$

$$\mathrm{Conf}(M, g) = \{ f \in \mathrm{Diff}(M) ;\ f^*g = e^{\phi} g \text{ for some } \phi \in C^\infty(M) \},$$

$$\mathrm{Aff}(M, g) = \{ f \in \mathrm{Diff}(M) ;\ f^*\,{}^g\nabla = {}^g\nabla \},$$

$$\mathrm{Proj}(M, g) = \{ f \in \mathrm{Diff}(M) ;\ f^*\,{}^g\nabla \text{ と } {}^g\nabla \text{ は射影的に同値} \}.$$

このとき上記の群を順番にそれぞれ(M, g)の等長, 共形, アフィン, 射影変換群と呼ぶ。ここで$f^*\,{}^g\nabla$と${}^g\nabla$が射影的に同値であることの定義を念のためしておこう。そのために, もっと一般的に∇と∇'をM上の二つのtorsion freeアフィン接続とする。∇による測地線と∇'による測地線が, parametrizationを無視すれば一致するとき, ∇と∇'は射影的に同値であると言う。これは明かに同値関係であるから, ∇の属する同値類を$\{\nabla\}$で表わし, ∇の属する射影的同値類という。このとき

$$\mathrm{Proj}(M, \{\nabla\}) = \{ f \in \mathrm{Diff}(M) ;\ f^*\nabla \in \{\nabla\} \}$$

とおき，射影的同値類$\{\nabla\}$の射影変換群という。

さて明かに次の包含関係がある：

$$\mathrm{Iso}(M,g)_0 \subset \mathrm{Aff}(M,g)_0 \subset \mathrm{Proj}(M,g)_0 = \mathrm{Proj}(M,\{{}^g\nabla\})_0$$

$$\mathrm{Iso}(M,g)_0 \subset \mathrm{Conf}(M,g)_0 \, .$$

実際には更に次の事実が知られている：

(i) $\mathrm{Iso}(M,g)_0 = \mathrm{Aff}(M,g)$;

(ii) $\mathrm{Iso}(M,g)_0$ はコンパクトである；

(iii) もし$\mathrm{Conf}(M,g)_0$がコンパクトでなければ，(M,g)はm次元球面に共形的に同型である（小畠の定理）。

上記(iii)の事実に関連して次の予想が有名である：

予想(A). もし$\mathrm{Proj}(M,g)$がコンパクトでなければ，(M,g)は正の定曲率空間である。

さらに一般的に次を予想する：

予想(B). M上の射影的同値類$\{\nabla\}$について，もし$\mathrm{Proj}(M,\{\nabla\})_0$がコンパクトでなければ，$(M,\{\nabla\})$は$m$次元球面か射影空間に射影的に同値である。

ここで予想(B)が肯定的であれば予想(A)も肯定的であることに注意しておく。以下に予想(B)について若干の考察をしたい。まず次の事実が分る。

命題．もし $\mathrm{Proj}(M, \{D\})_0$ がコンパクトでなければ，$\mathrm{Proj}(M, \{D\})_0$ の共通固定点が少なくとも一つ存在する。

さて我々は次の事実を証明できた：

定理（長野－落合）．$\{D\}$ を M 上の射影的同値類とする．さて $\mathrm{Proj}(M, \{D\})_0$ の自明でない一径数部分群 $\{\phi_t\}$ と $\{\phi_t\}$ の固定点 $x \in M$ が存在して，全ての t について微分写像 $(\phi_t)_* : T(M)_x \to T(M)_x$ が恒等写像 (identity map) であれば，$(M, \{D\})$ は m 次元球面か射影空間に射影的に同値である。

もし $\mathrm{Proj}(M, g)_0$ がコンパクトであれば，上記の性質を満たす一径数部分群は存在しないことが容易に分るから，上記の定理は，予想(B)が肯定的であることの一つの証拠になると思われる。